Árvores de Decisão

Uma lição
proferida no âmbito da cadeira
"Sistemas de Apoio à Decisão"
do Mestrado em Ciências Empresariais
do ISCTE,
em cumprimento parcial dos requisitos
para a realização das provas
de Aptidão Científica e Capacidade Pedagógica
de
Duarte Trigueiros

Lisboa, 9 de Julho de 1991

Introdução

De entre os instrumentos que ajudam os gestores a tomar decisões, destacam-se aqueles que permitem fazer face a situações de incerteza. O volume de vendas, os custos, qualquer resultado de uma acção que se empreenda, raramente pode ser previsto com detalhe. O futuro é sempre incerto, embora alguns resultados possam comhecer-se com mais certeza do que outros. Nos casos em que a incerteza é elevada, a ponto de pesar nas decisões, os modelos que ajudam os gestores a tomar decisões devem ser capazes de incluir esta componente. Existem várias técnicas que permitem entrar em linha de conta com a incerteza em modelos de suporte à decisão. Aqui, ocupar-nos-emos das chamadas árvores de decisão.

1. Temas a serem abordados nesta lição: O estudo do assunto genérico desta lição, as árvores de decisão, requer a introdução prévia de alguns temas complementares. Assim, ao longo desta lição, abordar-se-ão os seguintes tópicos:

1. Probabilidades e Valores Esperados.
2. A Função Utilidade.
3. Árvores de Decisão.
4. O valor da Informação Perfeita.
5. O valor da Informação Imperfeita.

Estes assuntos serão organizados em dois corpos, o primeiro orientado para questões gerais e o seguinte para as mais específicas.

2. Importância actual das árvores de decisão: As árvores de decisão têm sido um importante meio de suporte a decisões nos mais variados campos, mas especialmente em projectos de investimento e em planeamento financeiro ou de vendas. Porém, nem por isso se podem considerar muito populares entre os gestores. Várias razões estão na base desta deconfiança.

3. Em primeiro lugar, a ideia do óptimo como critério de decisão foi muito contestada no início da década de oitenta em prestigiosas revistas de gestão. A razão para tal contestação residia no facto de, em planeamento estratégico, o ganho de certas posições e opções a longo prazo ser algo de capital mas que escapava a estes instrumentos. Nessa altura citou-se como exemplo o caso da indústria japonesa, contrapondo-o ao modo de planear ocidental. Acusou-se a simples procura do óptimo de ser um factor gerador de estreiteza de vistas já que, afirmou-se, o lucro imediato não deixava os gestores ver mais longe[1].

Estas críticas vinham geralmente associadas com a rejeição de um NPV positivo (o facto de o valor actual líquido dos meios libertos pelo projecto ser positivo) como único critério de aceitação de um empreendimento.

4. Mas as razões aduzidas pelo planeamento estratégico não são as únicas a afastarem os gestores do uso de árvores de decisão. Outro factor de desconfiança é o facto de esta técnica exigir, para uma aplicação correcta, que o gestor perceba bem qual o papel da função utilidade quando os acontecimentos a planear se apresentam como únicos. Quando um gestor não percebe a finalidade objectiva dessa função, pode ficar facilmente convencido de que os valores óptimos previstos pelo modelo são artificiais e não têm grande aplicação prática em projectos únicos. Por sua vez, é frequente que os analistas, ao porem demasiado ênfase na subjectividade da função utilidade, transmitam uma imagem distorcida desta.

5. Hoje, existem condições para que as árvores de decisão ganhem de novo a importância que merecem, especialmente em projectos de investimento. Isto fica a dever-se ao refinamento de estudos em planeamento estratégico, por exemplo os respeitantes ao preço do abandono de um projecto e à quantificação das opções e posições, por meio da analogia com

[1]Hayes, R. and Abernathy, W. *Managing Our Way to Economic Decline.* Harvard Business Review, Jul-Aug. 1980, pp. 67-77;

Hayes, R. and Garvin, D. *Managing As If Tomorrow Mattered.* Harvard Business Review, May-Jun. 1982, pp. 71-79;

Hodder, J. and Iggs, E. *Pitfalls in Evaluating Risky Projects.* Harvard Business Review, Jan-Feb. 1985, pp. 128-135.

o modo como as opções são cotadas nos mercados de capitais (modelo de Black-Scholes)[2].

6. Além disso, o estudo de meios efectivos de pós-processamento de árvores de decisão com vistas a uma interpretação mais fácil e informativa do modelo, tem sido bastante descuidado como tema de investigação. Existem hoje algoritmos capazes de tornar muito mais sugestiva e útil qualquer árvore de decisão. Trata-se apenas de aplicá-los.

7. Por isto tudo é de esperar que as árvores de decisão ganhem de novo um lugar em tarefas de planeamento. Elas são a forma natural de descrever a decisão sequencial com incerteza e, pelo menos como base para elaboração posterior, não há nada que as possa substituir.

8. Conhecimentos requeridos: Para além de noções de finanças da empresa, esta lição supõe o conhecimento e familiariedade com a noção de probabilidade e com os teoremas básicos a ela ligados, incluindo a regra de Bayes e a noção de probabilidade condicional, *a-priori* e *a-posteriori*.

9. Bibliografia: Os livros citados a seguir encontram-se na biblioteca do ISCTE e podem servir para aprofundar conceitos. O primeiro deles tem um cariz prático e aborda duma forma amena muitos problemas da teoria das decisões. Além disso, utiliza exemplos em IFPS, a linguagem de modelação financeira instalada nos laboratórios do ISCTE. O segundo é mais sistemático e mais profundo. Pode ser usado como livro de texto.

S. Bodily. *Modern Decision Making.* McGraw Hill, New York, 1985.

H. Raiffa. *Decision Analysis.* Random House, New York, 1968.

10. É também recomendável a consulta de um excelente trabalho divulgador das árvores de decisão publicado na revista de gestão cuja citação se segue. Esta revista é assinada pela biblioteca do ISCTE.

[2] Kester, K. *Today's Options for Tomorrow Growth.* Harvard Business Review, Mar-Apr 1984, pp. 153-184.

J. Magee. "Decision Trees for Decision Making". *Harvard Business Review*, July-August 1964, pages 126–138, and "How to Use Decision Trees in Capital Investment", September 1964, pages 79–96.

11. Por último, para um maior aprofundamento podem também interessar os textos que a seguir se indicam. O primeiro é uma colectânea de artigos versando os principais temas de investigação em torno das árvores de decisão, da função utilidade e métodos afins. O segundo é um texto orientado para os problemas financeiros, com uma boa discussão da função utilidade. O terceiro contém a descrição de um novo método para interpretação de árvores de decisão em projectos de investimento. E o último explica como as árvores de decisão, quando conjugadas com a noção de opção, podem ajudar a quantificar a flexibilidade dos projectos.

G. Kaufman. *Modern Decision analysis.* Pinguin Books, UK, 1977.

C. Haley and L. Schall. *The Theory of Financial Decisions.* McGraw Hill, New York, 1979.

D. Trigueiros. *Robustez Como Critério de Decisão em Modelos Financeiros Sequenciais.* Dissertação, ISCTE, Lisboa, 1991.

L. Trigeorgis and P. Mason *Valuing Managerial Flexibility.* Midland Corporate Finance Journal, vol 5, (1), Spring 1987, pp. 14-21.

Indice

Capítulo 1

Valores Esperados e Utilidade

Neste capítulo vai-se aprender a calcular o lucro esperado quando o resultado de uma decisão por parte de um gestor é um *desenlace incerto* de entre vários possíveis. Também se abordará o problema das decisões não repetitivas. Por fim, introduzir-se-á muito sumariamente a noção de utilidade e descrever-se-á a forma de determiná-la em cada caso concreto. Estes conceitos servirão depois, na segunda parte desta lição, para explorar as técnicas conhecidas pelo nome de árvores de decisão.

1.1 Decisão e Desenlaces

Um gestor está a pensar fabricar e vender um novo produto. Ele sabe que esse negócio pode originar um desenlace de entre três possíveis: se a procura do produto for baixa, os prejuízos são de 4.000 milhares (uma dada unidade monetária). Se a procura for média, o lucro é de 3.000; por último, se a procura for alta, o lucro será de 6.000. A verosimilhança de cada desenlace é também conhecida.

O gestor tem de resolver se sim ou não irá fazer o negócio. Este acto é um exemplo daquilo a que se chama uma *decisão*. As decisões que os gestores enfrentam são semelhantes ao lançamento de dados ou ao jogo da roleta: antes de jogar, o jogador pode resolver não jogar. Mas uma vez lançados os dados só lhe resta esperar pelo desenlace.

Para tomar uma decisão à qual se seguem desenlaces incertos, o gestor tem ao seu dispor os seguintes dados:

O número de desenlaces. O lançamento de dados tem seis possíveis desenlaces. Um deles terá forçosamente que acontecer. Mas o jogo da "moeda ao ar" tem dois. O número total de desenlaces possíveis é usado, juntamente com a verosimilhança de cada desenlace, para calcular a incerteza da decisão.

A verosimilhança de cada desenlace. Certos desenlaces são muito prováveis e outros pouco. Quando os desenlaces associados a uma decisão são incertos, a verosimilhança de cada um deles pode geralmente ser conhecida. Existem muitas maneiras de expressar verosimilhança. A mais popular é o uso de probabilidades. As probabilidades obtêm-se através da análise da experiência passada.

O valor de cada desenlace. O lucro ou prejuízo que cada possível desenlace origina pode também ser muito variado. Desenlaces há que trazem lucros elevados ao passo que outros originam prejuízos. Não é o mesmo arriscar um milhão ou arriscar mil.

Conhecendo estes três dados o gestor sabe tudo o que é possível saber-se acerca da decisão que tem que tomar. A dificuldade está em interpretar tais dados de forma que eles lhe mostrem qual a decisão aconselhável.

1.2 Cálculo do Valor Esperado

Quando é possível conhecerem-se as probabilidades associadas a cada desenlace, pode calcular-se o *Valor Esperado* de uma decisão. O valor esperado é o valor a que em média essa decisão conduz. Suponha-se que uma dada decisão pode ter dois possíveis desenlaces, A ou B. O desenlace A significaria um lucro de 5.000 e o desenlace B um lucro de 6.000. Mas a probabilidade de que A aconteça é de 8/10 (e portanto a probabilidade de B acontecer é $1 - 8/10 = 2/10$). Qual será o valor esperado dessa decisão?

Uma vez que a probabilidade de 8/10 associada a um desenlace significa que é esperável que 8 ocorrências em cada 10 originem esse desenlace, e semelhantemente para a probabilidade de 2/10, não há dúvida de que, em média, o valor monetário da decisão de correr este risco será:

$$\begin{aligned}
\text{VALOR ESPERADO} &= 5.000 \times \tfrac{8}{10} + 6.000 \times \tfrac{2}{10} \\
&= 4.000 + 1.200 \\
&= 5.200
\end{aligned}$$

O valor esperado é portanto a média, ponderada pelas probabilidades, dos lucros ou prejuízos de cada desenlace. Quando um gestor tiver que decidir entre diversas alternativas, cada uma delas com o seu conjunto de desenlaces possíveis, ele deve escolher aquela que lhe ofereça o maior valor esperado. Se assim fizer, terá a garantia de que, em média, os seus lucros serão também os maiores possíveis.

Suponhamos que existem duas alternativas, o “Projecto X” e o “Projecto Y”, e o gestor deve escolher uma delas. Os desenlaces associados a cada alternativa são:

PROJECTO X		PROJECTO Y	
Probabilidade	Lucro	Probabilidade	Lucro
8/10	5.000	1/10	(2.000)
2/10	6.000	2/10	5.000
		6/10	7.000
		1/10	8.000

Para que possa tomar uma decisão correcta, o gestor deve calcular os valores esperados de cada um dos projectos e optar depois por aquele que lhe oferece um maior valor esperado. Vejamos qual deles seria neste caso o escolhido.

Proj. X:

Prob.		Lucro		V. Esp.
8/10	×	5.000	=	4.000
2/10	×	6.000	=	1.200
		Total	=	5.200

Proj. Y:

Prob.		Lucro		V. Esp.
1/10	×	(2.000)	=	(200)
2/10	×	5.000	=	1.000
6/10	×	7.000	=	4.200
1/10	×	8.000	=	800
		Total	=	5.800

Portanto, a alternativa a privilegiar seria o “Projecto Y” já que o seu valor esperado é superior ao do “Projecto X”.

Resumo. O valor esperado $E(x)$ decorrente de uma decisão envolvendo N possíveis desenlaces será calculado pela fórmula

$$E(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times p_i$$

onde x_i e p_i são, respectivamente, o valor e a probabilidade associados com o desenlace i. $E(x)$ é portanto o valor que se obteria em média quando a mesma decisão fosse tomada muitas vezes.

Perante a necessidade de escolher entre as alternativas $1, \cdots, j, \cdots, M$, o critério é:

$$\text{Escolher a alternativa } j \text{ tal que } E_j(x) = \max$$

Ver-se-á a seguir que o critério do valor esperado, também conhecido pelo nome de critério Bayesiano, não pode ser aplicado com toda a generalidade.

1.3 O Critério do Valor Esperado e as Decisões Repetitivas

No exemplo dado anteriormente, a preferência do projecto Y sobre X, ditada como está pelo critério do valor esperado, não deixaria convencido todo e qualquer gestor. De facto, o desenlace pior possível no caso de X é um lucro de 5.000 ao passo que quem escolhe o projecto Y pode incorrer em perdas de 2.000. Alguns gestores prefeririam um lucro certo, embora modesto, ao risco de terem prejuízos.

Por outro lado, no caso de Y, existem 70% de hipóteses de que o lucro seja de 7.000 ou mais. Este valor é bastante tentador. Nenhum desenlace do projecto X se aproxima de tal lucro. Alguns gestores quereriam certamente arriscar, tanto mais que uma probabilidade de 70% parece tornar tal lucro verosímil.

O que transparece nas observações acima é o facto de, perante decisões únicas, o critério do valor esperado deixar de ser convincente. De facto, uma vez que a decisão sobre a escolha do projecto X ou Y tem que ser feita uma só vez e o desenlace que se seguir, qualquer que ele seja, também acontecerá uma só vez, não parece que um valor esperado — que é o lucro obtido em média se a decisão fosse repetida muitas vezes — possa satisfazer como critério de decisão.

Claro que nos problemas em que os desenlaces não são únicos — acontecem mais do que uma vez — o critério do valor esperado é o adequado. Por exemplo, suponhamos que um director de vendas está a tentar decidir se irá ou não organizar um grupo de vendas pelo telefone composto de dez pessoas. Os custos fixos de tal grupo seriam de 80.000 e os custos variáveis seriam 5% das vendas. Os custos variáveis de produção são 65% das vendas. O aumento esperado no volume de vendas anual por cada um destes dez vendedores seria incerto. A verosimilhança de cada possível hipótese de aumento é:

Probabilidade	Incr. Volume de Vendas
4/10	20.000
35/100	30.000
25/100	45.000

O volume de vendas atingido por um qualquer membro do grupo é independente do volume de vendas alcançado pelos outros nove.

Uma vez que existem dez vendedores, o volume de vendas pode ser previsto por meio do critério do valor esperado. E da mesma forma, o facto de este conjunto de desenlaces possíveis se repetir todos os anos, também fará com que o volume de vendas seja aquele que, em média, é atingido.

O valor esperado das vendas por vendedor será:

Probabilidade		Vendas		Valor Esperado
4/10	$\times$	20.000	=	8.000
35/100	$\times$	30.000	=	10.500
25/100	$\times$	45.000	=	11.250
		Total	=	29.750

Portanto, cada vendedor irá aumentar as vendas de 29.750 em média.

Uma vez que os encargos variáveis são $65\% + 5\% = 70\%$ das vendas, restam 30% para cobrir os custos fixos. 30% de 29.750 são 8.925 por vendedor. Dez vendedores conseguirão, em média, um lucro de 89.250. Isto cobre os 80.000 de custos fixos. Portanto, existe um lucro incremental de 9.250 e a decisão é de tomar.

Se todos os dez vendedores conseguissem apenas vender 20.000 extra, o projecto iria perder 20.000 ao fim de um ano. Porém, a verosimilhança de tal eventualidade é mínima. De facto, como é sabido, a verosimilhança de mais de um desenlace independente pode calcular-se multiplicando as verosimilhanças individuais de cada um deles.

Havendo dez vendedores, como $P(1, 20.000) = \dfrac{4}{10}$ ela seria: $P(10, 20.000) = \left(\dfrac{4}{10}\right)^{10}$

o que dá menos de um centésimo por cento. Como se vê, onde quer que existam desenlaces repetidos, a tendência para que os valores obtidos sejam, em média, próximos dos esperados é muito forte.

Resumo. O critério do valor esperado deve usar-se sempre que as decisões que conduzem a desenlaces incertos são repetitivas. Isto acontece, quer quando o número de sujeitos envolvidos é mais do que um, quer quando o desenlace é obtido para mais de um período.

Desvios em relação ao valor esperado serão tanto menos prováveis quanto maior for a repetição.

1.4 A Função Utilidade

Consideremos a seguinte tabela de incerteza para um dado projecto:

Resultado	Probabilidade	Meios Libertos
Sucesso	8/10	100.000
Insucesso	2/10	(200.000)

O valor esperado é

$$100.000 \times \frac{8}{10} + (-200.000) \times \frac{2}{10} = 40.000$$

Embora o valor esperado seja positivo, há duas hipóteses em dez de que o negócio leve a perdas de 200.000. Um desenlace deste tipo teria consequências sérias para a viabilidade de muitas empresas. Se as perdas de 200.000 forem inaceitáveis, ter-se-á que desistir do negócio. Por outras palavras, o critério do valor esperado deixou de fazer sentido.

Comparemos agora o projecto acima com um outro onde os meios libertos fossem exactamente iguais à quarta parte dos anteriores:

Resultado	Probabilidade	Meios Libertos
Sucesso	8/10	25.000
Insucesso	2/10	(50.000)

O valor esperado é agora 10.000. O mesmo gestor que rejeitou o primeiro projecto poderia agora decidir aceitar este. Um prejuízo de 50.000, embora sério, pode não ser desastroso para algumas empresas. Para este gestor, uma perda de 200.000 é muito mais de quatro vezes pior do que a perda de 50.000. A primeira levaria á liquidação da empresa ao passo que a segunda não inviabilizaria uma recuperação.

Existe uma forma tradicional de incorporar o problema acima nos critérios para a tomada de decisões. Consiste em calcular os valores esperados, não em termos de dinheiro mas de *utilidade*. A utilidade é uma variável nova que mede o efeito real de um ganho ou de uma perda na economia de uma empresa.

Consideremos o gráfico da figura 1. Este gráfico pode ser usado para converter dinheiro esperado (em abcissas) em utilidade para uma dada empresa. A linha recta a 45^o indica a *linha de indiferença*. Se tal linha fosse a função utilidade de uma empresa, seria indiferente usar dinheiro esperado ou utilidade como critério de decisão. Nesse caso era forçoso concluir que, para tal empresa, o montante dos meios libertos incertos não afectava as decisões.

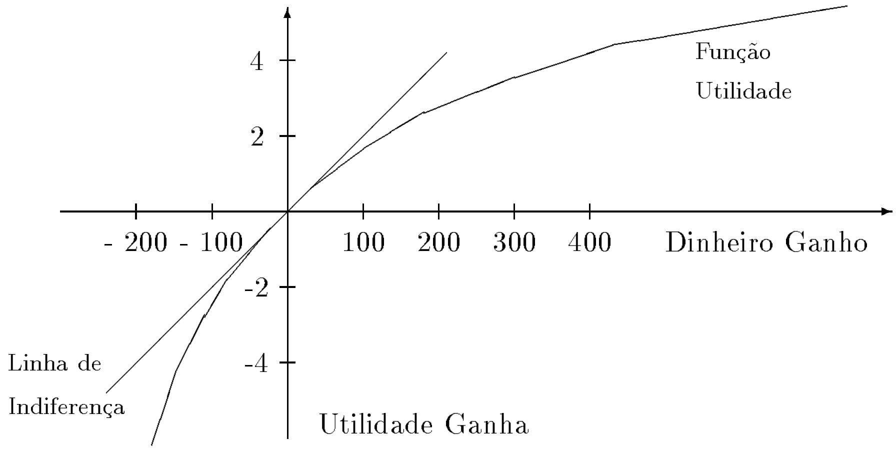


Figura 1: A função Utilidade permite medir o efeito real de um ganho ou de uma perda.

Porém, em regra, a função utilidade não é uma linha recta. A figura 1 mostra um caso bastante típico de forma da função utilidade. Por ela pode ver-se que as perdas em utilidade são maiores do que as perdas em dinheiro correspondentes; e os ganhos em utilidade são menores do que os ganhos em dinheiro. Perdas de 40.000 têm uma utilidade de -1, o que é um nível de aceitabilidade moderado, ao passo que as perdas da ordem dos 200.000 têm uma utilidade negativa, muito severa, de -5.

Pode a princípio julgar-se estranho que, no caso dos ganhos, a utilidade seja também menor do que o dinheiro esperado. Isto está relacionado com o tamanho da empresa e com a verosimilhança de ganhos ou perdas elevados para a dimensão de cada projecto.

Vamos agora ver o que aconteceria ao projecto discutido acima quando o critério da utilidade esperada fosse usado em vez do anterior critério do lucro esperado:

Prob.	Meios Libertos	Utilidade	Utilidade Esperada
8/10	100.000	1	8/10
2/10	(200.000)	-5	-1
			Total: $-2/10$

Uma vez que o projecto tem uma utilidade negativa, ele seria rejeitado. Portanto, o uso da função utilidade pode corrigir, em certa medida, a incapacidade do critério do valor esperado para apoiar decisões não repetitivas.

Note-se que, sempre que as decisões forem repetitivas, o critério da utilidade esperada deverá degenerar no do valor esperado. Só faz sentido usar utilidade em vez de dinheiro quando as decisões são únicas.

Qual é a base para estabelecer uma relação entre dinheiro esperado e utilidade? Esta base só pode ser o interesse da empresa, a sua dimensão e política, vistos pelos olhos do gestor. Portanto, a descoberta da função utilidade apropriada a um problema de decisão exige a objectivação, por parte do gestor, de algo que geralmente as pessoas não estão habituadas a objectivar: aquilo que, no seu ponto de vista, é o risco aceitável para um lucro esperado.

O método geralmente empregue para determinar a função utilidade consiste em usar *Jogos de referência*, os quais são comparados com o lucro e o risco de cada desenlace. Os jogos de referência têm apenas dois desenlaces. O analista começa por determinar o pior e o melhor dos desenlaces possíveis no projecto em estudo. Ao pior, ele atribui uma utilidade de zero. Ao melhor, uma utilidade de 1 (pode usar-se qualquer outra escala, por exemplo 0 a 100 ou -5 a +5, como no caso descrito acima). Depois, o analista põe o gestor perante a seguinte questão: se tivesse que escolher entre um lucro *certo* e um jogo de "moeda oa ar" em que, se saísse "caras", ganhava o valor correspondente ao melhor desenlace do seu projecto mas se saísse "coroas" perdia o equivalente ao pior dos desenlaces, qual seria o valor desse tal lucro certo que o faria desistir do jogo?

Ao responder a esta pergunta o gestor é obrigado a determinar qual o valor que dá ao jogo. Esse valor é conhecido pelo nome de *valor certo equivalente* a desenlaces incertos. A incerteza, neste caso, vem dada pelas probabilidades de sair caras ou coroas: 1/2. Portanto, o valor certo equivalente tem uma utilidade de 1/2. O analista iria marcar na curva de utilidade o valor 1/2 como correspondendo ao lucro certo equivalente (numa escala de 0 a 100 usar-se-ia 50; numa escala de -5 a +5 usar-se-ia o valor zero).

Agora o analista já tem três pontos da curva de utilidade. Para achar outros, basta repetir a pergunta usando a metade superior e a inferior e depois, se for preciso, os quatro quartos. Vejamos um exemplo.

Num projecto cujo melhor e pior desenlaces são 40.000 e (10.000) respectivamente, o analista começaria por determinar qual o lucro certo que levaria a firma a desistir de um jogo de moeda ao ar em que, se saísse caras ganharia 40.000 mas se saísse coroas perderia 10.000. Se este lucro fosse 5.000, uma utilidade de 1/2 corresponderia a 5.000. Depois, o analista determinaria o lucro certo equivalente a um jogo de moeda ao ar com 40.000 de prémio e 5.000 de penalização. Se tal lucro certo fosse 18.000, o lucro de 18.000 teria a utilidade de 3/4. Por último, o analista acharia o lucro certo equivalente a um jogo com um prémio de 5.000 e uma penalização de 10.000. Se a empresa só jogasse tal jogo caso

Valor	Util.	Valor	Util.	Valor	Util.	Valor	Util.	Valor	Util.
(10)	0	(5)	1/4	5	2/4	18	3/4	40	4/4

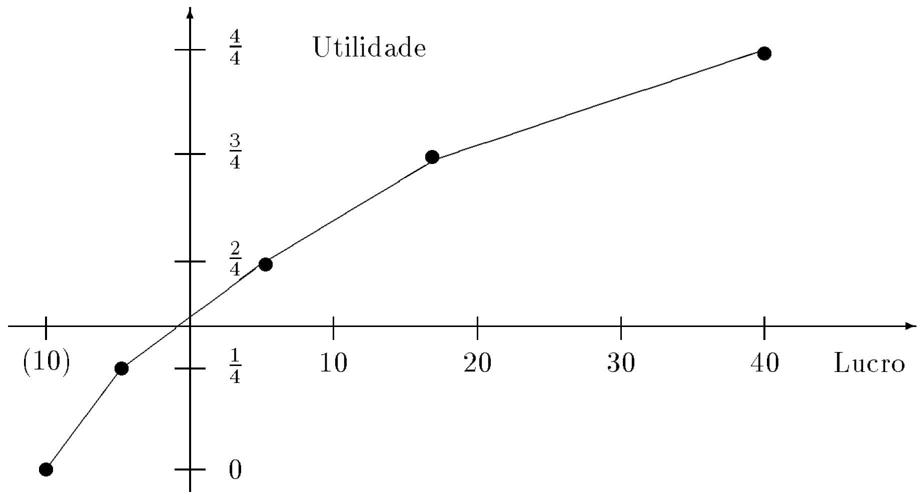


Figura 2: Determinação da relação utilidade-lucro para um projecto.

recebesse de antemão 5.000, o valor certo equivalente seria de (5.000) e esse seria também o valor correspondente a uma utilidade de 1/4: a empresa pagaria para se livrar do jogo.

O analista está agora de posse de cinco pontos que definem a curva de utilidade da empresa para o projecto em estudo. Esses pontos, e a respectiva representação gráfica, encontram-se na figura 2. A curva sobreposta aos pontos pode obter-se por simples interpolação.

Deste modo, conseguiu-se estabelecer a relação entre dinheiro e utilidade, baseada no risco equivalente. Note-se que a posição do eixo das abcissas relativamente ao das ordenadas é arbitrária. Isto decorre do facto da escala usada para medir utilidade ser, ela própria, arbitrária. Na figura 2 esse facto foi posto em relevo por meio do deslocamento do ponto de utilidade zero em relação ao ponto de lucro zero.

Resumo. Nas decisões que não se repetem, o simples critério do valor esperado deve ser substituído pelo critério da utilidade esperada. A função utilidade descreve, idealmente, a relação existente entre risco e dinheiro ganho no caso concreto de uma empresa.

O lucro certo equivalente é o valor mínimo pelo qual uma empresa estaria disposta a vender uma oportunidade de negócio arriscada, traduzível num jogo de moeda ao ar onde estivessem em causa o lucro máximo e a pior perda desse negócio.

1.5 Atitudes Perante o Risco

Uma característica valiosa da função utilidade é a de permitir ao gestor distinguir entre expectativas e preferências. Passa a ser possível discutir separadamente a validez das previsões e a dos critérios a adoptar perante o risco. Uma expectativa acerca do futuro é geralmente expressa por meio de probabilidades; mas tais medidas podem ser objecto de controvérsia ou revisão no seio da empresa. Não existindo a função utilidade, a cada reajuste da verosimilhança dos desenlaces teria que seguir-se uma nova discussão sobre o interesse do projecto.

Uma preferência, critério ou política da empresa em face do risco pode, com a existência da utilidade, ser discutida em termos dessa mesma utilidade, independentemente da validade ou acerto das probabilidades encontradas. A utilidade torna objectivável o critério de uma empresa perante o risco. Vão-se descrever brevemente os principais critérios perante o risco.

A diferença entre o valor esperado do jogo e o valor certo equivalente chama-se o *prémio do risco*. Se uma empresa se mostra indiferente entre receber 1.000 ou atirar uma moeda ao ar e arriscar-se a ganhar 10.000 ou a perder 5.000, o prémio do risco para esse ponto da sua função utilidade é

$$\left(\frac{1}{2} \times 10.000 - \frac{1}{2} \times 5.000\right) - 1.000 = 2.500 - 1.000 = 1.500$$

Para tal empresa, um lucro certo de 1.000 é tão tentador como um lucro esperado mas incerto de 2.500. O prémio do risco é portanto o dinheiro de que uma empresa está disposta a abrir mão para evitar o risco de perder.

Quando o prémio do risco de uma empresa é sempre positivo para jogos com qualquer parada, diz-se que a sua política mostra *aversão ao risco*. Neste caso, quanto maior for o prémio do risco exigido para aceitar um jogo, maior é a aversão. Quando, pelo contrário, o valor certo equivalente excede o valor monetário esperado — e portanto o prémio do risco é negativo —, diz-se que a política de uma empresa é *afim ao risco*. Ainda pode dar-se o caso de um gestor ou uma empresa serem *indiferentes ao risco*, quando o valor certo equivalente iguala o valor esperado. Em tal caso, a função utilidade seria desnecessária.

A função utilidade é côncava no caso de aversão ao risco e convexa quando existe afinidade. Havendo indiferença, a utilidade é uma linha recta. A figura 3 ilustra estas três possibilidades.

Não há razão para que uma empresa não seja avessa ao risco numa região da sua função utilidade e afim em outra. Por exemplo, uma curva em S mostraria aversão ao risco para

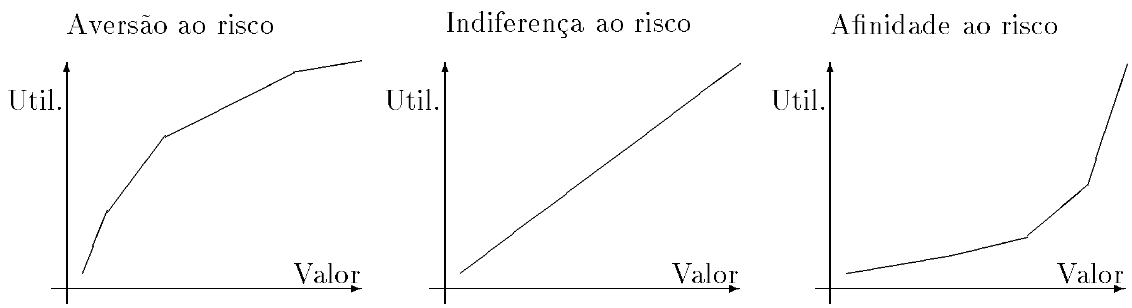


Figura 3: A forma da função utilidade em cada uma das três atitudes perante o risco.

montantes elevados e afinidade para montantes pequenos. A maioria das empresas, porém, tendem a ser avessas ao risco perante qualquer montante que esteja em jogo. Há uma boa razão para isso: se uma empresa fosse afim ao risco em todos os seus projectos, perderia dinheiro — em média — já que estaria a pagar, várias vezes seguidas, mais do que o valor esperado desses projectos. A longo prazo, a afinidade ao risco conduz à ruína.

Quando numa empresa a aversão ao risco é a mesma, seja qual for o montante em jogo, a função utilidade é logarítmica. Diz-se neste caso que existe uma aversão *constante* ao risco. O caso mais comum é porém a aversão *decrescente*. Dá-se quando o prémio do risco decresce regularmente com jogos que são idênticos excepto no facto de que se vai somando um valor constante ao desenlace. A próxima tabela ilustra este tipo de aversão decrescente.

Desenlace		Valor Esperado	Valor Certo Equivalente	Prémio do Risco
(10.000),	0	(5.000)	(6.339)	1339
0,	10.000	5.000	4.365	635
10.000,	20.000	15.000	14.580	420
20.000,	30.000	25.000	24.686	314

A equação capaz de modelar uma utilidade deste tipo é

$$\text{Utilidade} \;=\; \log\;(\text{ valor monetário } + \; A\;)$$

em que A estabelece o grau de aversão ao risco. Um A elevado significa menor aversão. Muitos investidores parecem reger-se pelo critério acima. Isto pode ter uma explicação no facto de a riqueza tornar as pessoas menos cautelosas e mais propensas a arriscar mas não a ponto de as transformar em afins ao risco.

Resumo. Há três atitudes perante o risco: aversão, afinidade e indiferença. Nas empresas, a mais corrente é a aversão. Uma função utilidade de forma côncava indica aversão ao risco.

O tipo mais comum de aversão ao risco é a aversão decrescente logarítmica.

Capítulo 2

Árvores de Decisão

As árvores de decisão são diagramas capazes de enumerar todas as possibilidades lógicas de uma sequência de decisões e ocorrências incertas. Elas mostram esquematicamente todo o conjunto de acções alternativas e acontecimentos possíveis ao longo de um projecto.

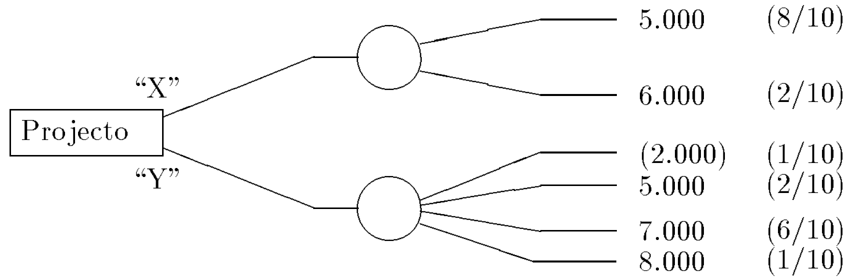
2.1 O Elemento Básico de Uma Árvore de Decisão

Ao ser introduzido o critério do máximo valor esperado (secção 1.2), fez-se alusão a um problema que já continha o elemento básico de qualquer árvore de decisão. Nessa altura supôs-se que um gestor era chamado a decidir qual das duas alternativas, o "Projecto X" ou o "Projecto Y", deveria ser escolhida. Os desenlaces incertos associados a cada uma destas alternativas podem ver-se na figura 4, na página 14.

A árvore de decisão correspondente a este problema seria a que aparece na mesma figura, em baixo. Cada uma das possíveis decisões que o gestor pode tomar é um "ramo" desta árvore. Estes, por sua vez, dividem-se em "folhas", cada uma contendo um dos possíveis desenlaces incertos. O conjunto forma portanto uma estrutura hierárquica onde fica esquematicamente representado o universo de decisões e desenlaces que o gestor enfrenta.

As árvores de decisão podem ser muito complexas em estrutura mas são sempre feitas a partir de três elementos simples, já presentes no caso que a figura 4 documenta. Esses elementos são:

Uma estrutura hierárquica: Chama-se estrutura hierárquica àquela em que existe um só tronco principal do qual saem os ramos. Cada ramo, por sua vez, é uma pequena estrutura hierárquica. Este tipo de estrutura decorre do facto de as árvores de decisão



Projecto X	
Probabilidade	Lucro
8/10	5.000
2/10	6.000

Projecto Y	
Probabilidade	Lucro
1/10	(2.000)
2/10	5.000
6/10	7.000
1/10	8.000

Figura 4: Um elemento básico de qualquer árvore de decisão. A uma decisão de um gestor ("X" ou "Y") segue-se um desenlace incerto de entre os possíveis. As probabilidades associadas a cada um destes desenlaces aparecem entre parêntesis.

descreverem *sequências* de acontecimentos no tempo. Os primeiros condicionam os seguintes.

Uma colecção de atributos: Nos pontos onde o tronco se divide ou onde os ramos se sub-dividem, aparecem as variáveis do problema, isto é, os factores conhecidos como capazes de influenciar o desenlace. Estes atributos são de dois tipos:

Decisões que o gestor pode vir a tomar numa dada altura. São geralmente representadas por rectângulos. Na árvore da figura 4, existe um atributo que é uma decisão: A escolha entre o projecto X ou Y.

Ocorrências, também conhecidas como "jogadas da natureza", que são acontecimentos incertos (podem ser uma entre várias hipóteses) que o gestor não domina mas acerca dos quais conhece as probabilidades de ocorrência. Costumam representar-se por meio de um circulo. Na figura 4, existem dois atributos que são ocorrências ou jogadas da natureza e que se seguem à tomada de uma decisão por parte do gestor.

Uma colecção de desenlaces: Cada desenlace tem um valor associado, o lucro ou perda que o gestor enfrenta se ele se der. Na figura 4 existem seis possíveis desenlaces e respectivos valores.

Qualquer problema de decisão sequencial pode caracterizar-se por estes três elementos. O primeiro deles, a estrutura hierárquica, determina a complexidade aparente do problema.

2.2 Cálculo do Valor Esperado em Árvores de Decisão

Uma árvore de decisão permite usar os critérios descritos na primeira parte desta lição, mas com generalidade. O gestor deixa de estar confinado a problemas simples, com poucos atributos. Por mais complicados que pareçam as estruturas de decisão, os princípios são idênticos aos vistos na primeira parte deste estudo. As árvores de decisão servem para facilitar o estudo lógico do problema e os cálculos, mas não introduzem modificações nos procedimentos e raciocínios próprios destes problemas.

Uma empresa tem em estudo um novo produto do qual os gestores esperam grandes coisas. De momento, eles têm duas possíveis acções a seguir: fazerem um teste de venda do produto, ou abandoná-lo. Se resolvem testá-lo, isto custar-lhes-á 100.000 e a resposta do público pode ser positiva ou negativa, com probabilidades de 6/10 e 4/10 respectivamente.

Se se der uma resposta positiva, então os gestores terão que decidir se abandonam a produção ou o produzem em grande escala. No caso de decidirem produzir em grande escala, a resposta do público pode ser baixa, média ou alta, com probabilidades 2/10, 5/10 e 3/10 respectivamente. Uma resposta baixa iria cifrar-se em perdas de 200.000. Uma resposta média originaria lucros de 200.000. E uma resposta elevada criaria lucros de 1.000.000.

Se o resultado do teste de mercado é negativo, os gestores já decidiram que abandonariam o produto. Onde quer que os gestores decidam abandonar o produto, há sempre um lucro de 50.000 por venda de material.

Todos os valores apresentados encontram-se já descontados: são valores actuais.

A árvore de decisão correspondente à descrição acima encontra-se na figura 5 na página 16. Ela vai-nos permitir ilustrar o método de cálculo do valor esperado. Tal método consiste simplesmente em, a partir dos desenlaces, ir calculando os valores esperados intermédios até chegar ao tronco.

Assim, neste caso, o valor esperado para o atributo F será calculado com base nos

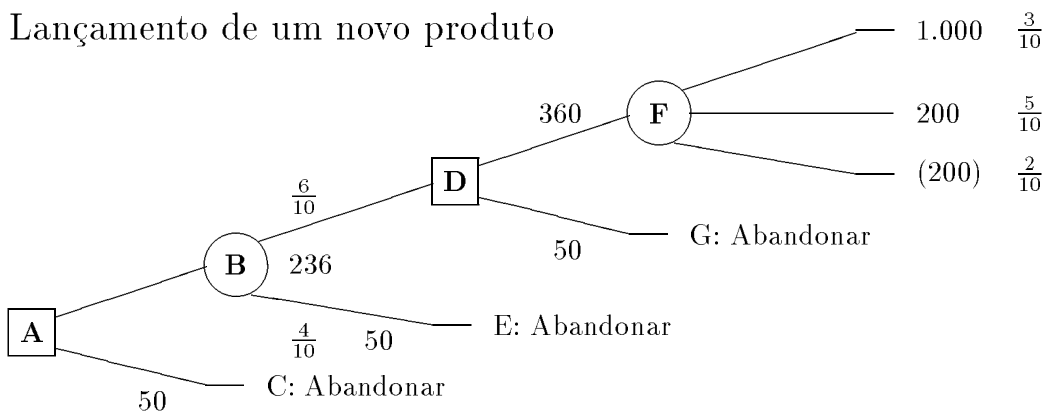


Figura 5: Árvore de decisão para o lançamento de um novo produto.

desenlaces:

Probabilidade				Valor Esperado
3/10	$\times$	1.000.000	=	300.000
5/10	$\times$	200.000	=	100.000
2/10	$\times$	(200.000)	=	(40.000)
		Total G:	=	360.000

Agora vão-se calcular *para trás* os restantes valores esperados. Uma vez que o valor do abandono é 50.000, o valor esperado em F é maior. Portanto, a decisão a tomar em D é a de avançar com a produção em massa. E sendo assim, o valor esperado em D é o mesmo que em F.

O atributo B é uma jogada da natureza. Os desenlaces intermédios são uma procura fraca do produto que está a ser testado — o que originaria o seu abandono — ou uma procura elevada, o que originaria um valor de 360.000 — o valor esperado da sua produção em massa. Vamos calcular o valor esperado da forma habitual.

Probabilidade				Valor Esperado
6/10	$\times$	360.000	=	216.000
4/10	$\times$	50.000	=	20.000
		Total B:	=	236.000

Portanto, a decisão aconselhada pela árvore — quando o critério usado é o do valor monetário esperado — é de avançar com o teste já que o valor esperado do ramo A-B é de 136.000 (236.000, subtraído do custo do teste) ao passo que o valor do ramo A-C é apenas de 50.000. O gestor, nesta fase, tem a liberdade de decidir se sim ou não aceita o resultado desta análise. Depois de decidir testar, poderá sempre abandonar o produto se a procura não for encorajadora. Nesse caso ele iria perder menos 50.000 do que os prejuízos.

Recorde-se que o critério do valor esperado é de discutível interesse quando as decisões não são repetitivas. Estudando atentamente o método seguido no caso acima, fica claro que os valores esperados não representam nada de real e não serão atingidos nunca. Só quando os percursos descritos pela árvore de decisão são trilhados várias vezes, irá o gestor obter, em média, os valores semelhantes aos esperados.

Como vimos, o uso de utilidade em vez de dinheiro pode, em certa medida, mitigar este problema. As árvores de decisão que usam utilidade calculam-se da mesma forma. Apenas os desenlaces são expressos em utilidadade e não em dinheiro. Como consequência, os valores esperados intermédios virão tambem em utilidade. O exemplo seguinte ilustra o uso da função utilidade em árvores de decisão.

Um agricultor tem que decidir se aceita ou rejeita um contrato segundo o qual os seus lucros irão depender da qualidade da colheita em duas zonas, A e B. A sua árvore de decisão encontra-se na figura 7 (página 19).

É fácil de ver que a decisão de aceitar o contrato tem um valor esperado de 33.500 ao passo que a decisão de rejeitá-lo tem um valor esperado de 35.100. Portanto, parecia que o agricultor não deveria aceitar o contrato.

Mas o agricultor não está satisfeito. Ele pensa que não faz sentido neste caso tomar decisões com base em valores médios uma vez que as colheitas a que o contrato se refere só vão acontecer nesse ano. Assim, o analista encarregado do estudo resolve determinar a função utilidade do agricultor para essa situação.

Depois de aplicar a técnica descrita na primeira parte desta lição, o analista fica de posse da função utilidade descrita pela figura 6 na página 18.

A árvore de decisão é de novo calculada mas agora, em vez dos desenlaces serem expressos em dinheiro, são-no em utilidade. Como se vê pela figura 8 (na página 20) a acção com mais utilidade esperada é agora aceitar o contrato.

O uso da utilidade sugere, neste caso, a decisão oposta à do valor esperado. Isto deve-se à forma avessa ao risco da utilidade do agricultor, o que faz com que a rejeição do contrato, mais arriscada, seja penalizada mais fortemente do que a aceitação. Note-se que, apesar da utilidade parecer muito semelhante, os lucros certos equivalentes para cada alternativa têm um valor monetário bem diferente.

Resumo: As árvores de decisão compõem-se de estrutura hierárquica, que pode ser simples ou complexa; atributos, que podem ser decisões ou jogadas da natureza; e desenlaces,

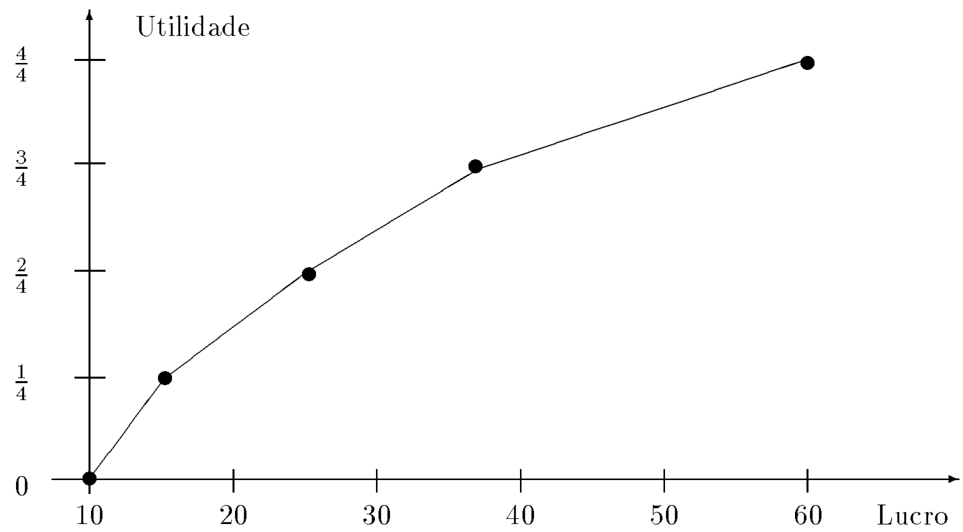


Figura 6: Função utilidade que reflecte a relação risco - lucros no caso de um agricultor.

que podem ser discretos ou de evolução contínua.

O valor esperado dos lucros ou da utilidade calcula-se resolvendo a árvore no sentido inverso ao desenrolar dos acontecimentos. Este método pode ajudar a decidir qual o movimento do gestor que mais plausivelmente conduz ao resultado desejado.

2.3 O Valor da Informação Perfeita

A informação perfeita é o conhecimento do futuro desenlace que se segue a uma decisão. Uma informação perfeita faria com que os gestores pudessem escolher as decisões mais lucrativas com a certeza de acertarem. Portanto, qualquer gestor estaria disposto a pagar um dado preço por possuir tal informação. Vamos ver a forma como o critério do valor esperado avalia o preço da informação perfeita.

Uma empresa tem três projectos possíveis para investir. Cada um deles daria origem a determinados lucros. Mas os lucros dependem da situação do mercado. O mercado pode vir a ter um dos três estados seguintes: Estado 1, com uma verosimilhança de 5/10. Estado 2, com 2/10; e estado 3, com 3/10. Os desenlaces, em termos de lucro e dos estados possíveis do mercado, seriam:

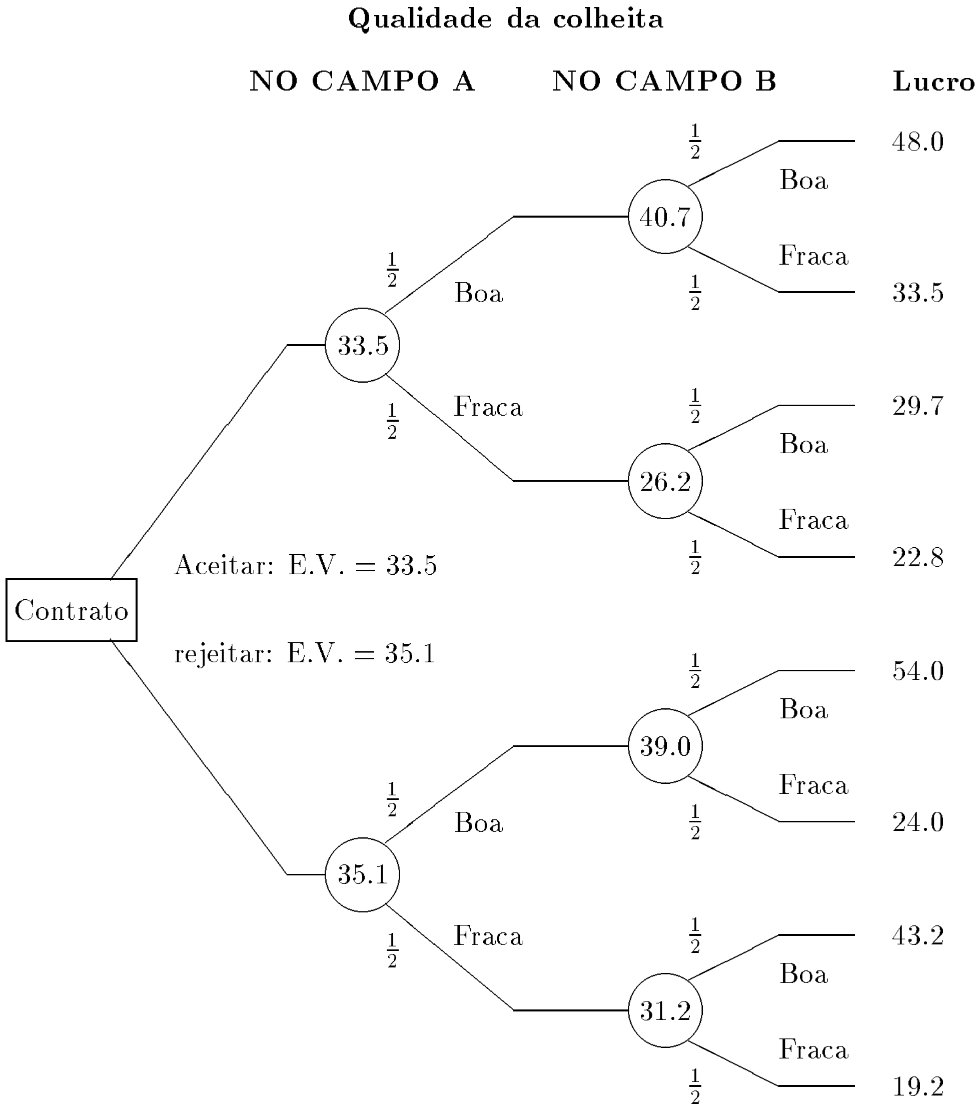


Figura 7: Árvore de decisão representando a sequência lógica que se segue ao acto de aceitar ou rejeitar um contrato de venda de colheitas. Primeiro critério: Maximização dos lucros esperados.

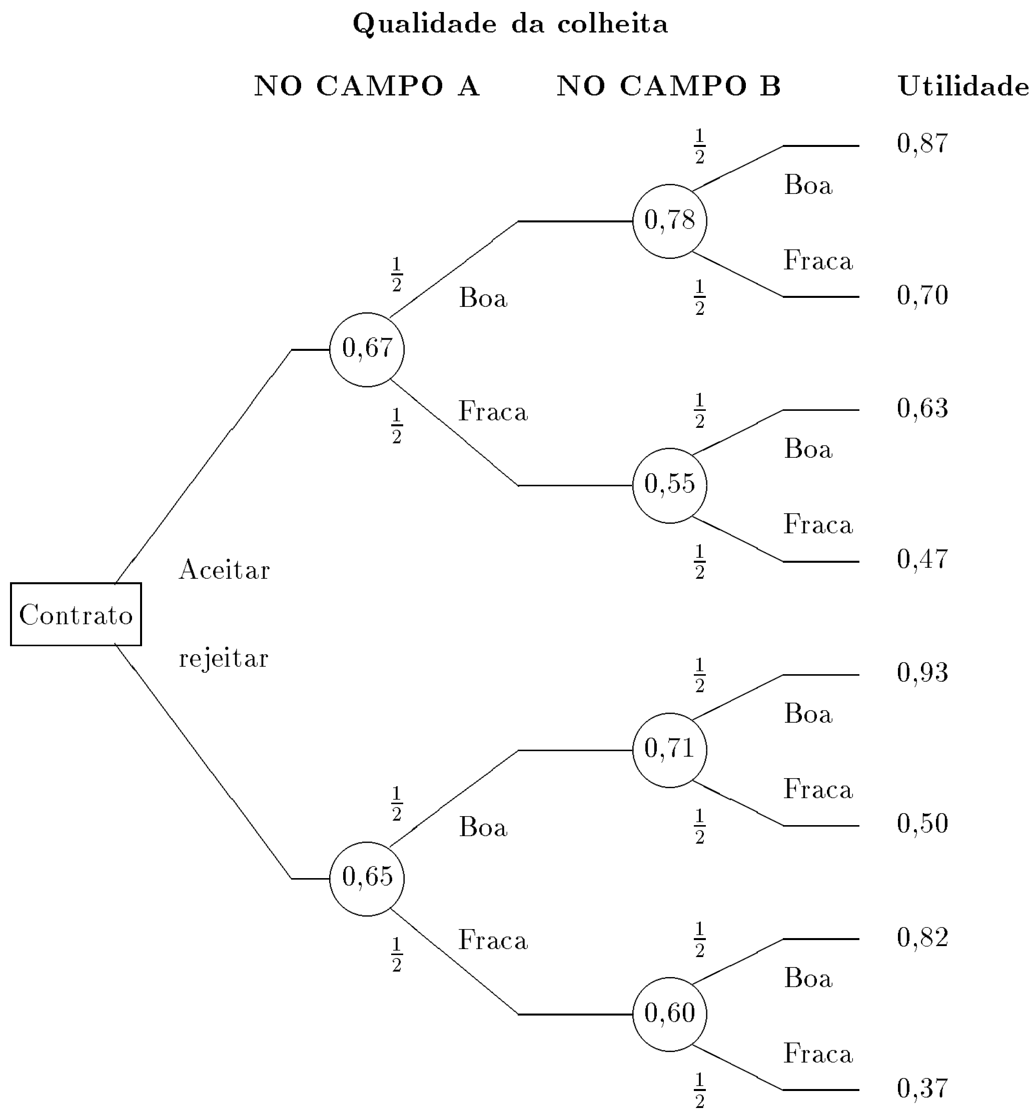


Figura 8: Árvore de decisão representando a sequência lógica que se segue ao acto de aceitar ou rejeitar um contrato de venda de colheitas. Segundo critério: Maximização da utilidade esperada.

	Lucro consoante o mercado		
Projecto	estado 1	estado 2	estado 3
A	75	20	5
B	45	80	55
C	60	60	45

Qual dos projectos deveria ser escolhido se o critério do valor esperado fosse considerado aceitável? E qual o valor, para a empresa, da informação perfeita acerca do futuro estado do mercado?

Calculemos o valor esperado de cada projecto em face da incerteza do mercado:

Estado do		Projecto A		Projecto B		Projecto C	
Mercado	Prob.	Lucro	V. Esp.	Lucro	V. Esp.	Lucro	V. Esp.
1	5/10	75	37.5	45	22.5	60	30.0
2	2/10	20	4.0	80	16.0	60	12.0
3	3/10	5	1.5	55	16.5	45	13.5
Total:			43.0		55.0		55.5

O projecto C deveria pois ser o escolhido já que apresenta o maior valor esperado.

Com perfeita informação acerca do futuro estado do mercado, esta empresa teria escolhido o projecto mais rentável para esse estado: se o estado 1 fosse o previsto, o projecto A é o que deveria ser escolhido. Nesse caso, o lucro seria de 75. Se o estado 2 fosse o previsto, então o projecto a escolher deveria ser o B e o lucro seria de 80. Por último, se o estado 3 fosse o previsto, também se deveria escolher o projecto B e o lucro seria de 55.

O valor esperado dos lucros, no caso de informação perfeita, seria portanto:

Projecto	lucro	Prob.	V. Esp.
A	75	5/10	37.5
B	80	2/10	16.0
B	55	3/10	16.5
Total:			70.0

Uma vez que o valor esperado dos lucros sem informação perfeita era de 55.5 (projecto C), o valor da informação perfeita seria o incremento do valor esperado que se obteria por dispôr dessa informação. Neste caso, o incremento é de $70 - 55.5 = 14.5$: um gestor estaria disposto a pagar até um máximo de 14.500 em estudos de mercado que lhe permitissem conhecer com certeza o seu estado no futuro próximo. Porém, neste caso concreto, o uso do critério do valor esperado não parece muito convincente: se a informação é perfeita, que lógica há em considerar probabilidades? Uma probabilidade denota informação imperfeita.

É interessante notar que o projecto C, aquele que o seria escolhido sem informação perfeita, nunca seria escolhido caso o gestor possuísse um completo conhecimento do mercado no futuro. A razão para tal é o facto de C ser o melhor projecto em média — mas ser o pior quando se consideram os desenlaces individuais.

Em muitas situações o critério de maximização do valor esperado é válido por si, sem necessidade de recorrer à determinação da função utilidade. Isto dá-se sempre que os fenómenos em estudo são repetitivos. Vejamos um exemplo de cálculo do valor da informação perfeita neste caso.

Uma empresa de assistência marítima instalou recentemente nova maquinaria em todos os estaleiros onde tem clientes. Mas ainda não decidiu qual a quantidade a encomendar de certas peças suplentes necessárias para reparar essas novas máquinas. As peças custam 2.000 cada uma mas só estão disponíveis se forem encomendadas agora. Quando uma máquina se avaria e não há peças suplentes disponíveis, o preço do conserto por fora sobe para 15.000. Cada instalação tem uma vida útil de dez anos e a distribuição de probabilidades de avarias durante este tempo, baseada na experiência de outras instalações semelhantes, é próxima da distribuição de Poisson. Pode tomar-se a seguinte tabela como uma aproximação aceitável.

N. de avarias durante dez anos	Probabilidade
0	0,1
1	0,4
2	0,3
3	0,1
4	0,1
5 ou mais	nula

Ignorando os descontos para valores actuais, pretende-se saber: Qual o valor esperado do número de avarias durante o período de dez anos por estaleiro. Qual o número óptimo de peças suplentes que devem ser encomendadas já, por estaleiro. O valor de uma informação perfeita acerca do número de avarias nesses dez anos.

O número esperado de avarias calcula-se como de costume:

Probabilidade		Número de avarias		Número esperado
$0,1$	$\times$	0	$=$	0
$0,4$	$\times$	1	$=$	$0,4$
$0,3$	$\times$	2	$=$	$0,6$
$0,1$	$\times$	3	$=$	$0,3$
$0,1$	$\times$	4	$=$	$0,4$
		Total avarias:	$=$	$1,7$

São esperadas 1,7 avarias por estaleiro durante o período de dez anos. Vai-se agora construir a tabela que relaciona as quantidades compradas com o número de avarias em termos de custos. Assim, se num estaleiro foram compradas à partida 3 peças e o número de avarias foi de zero nos dez anos, o custo é de 6.000 — correspondente ao preço das peças suplentes. Mas se só foram compradas duas peças suplentes e o número de avarias é três, então o custo sobe para 19.000: 4.000 do custo de duas peças e mais 15.000 devido a um arranjo fora. Como resultado deste raciocínio, a referida tabela é:

Peças a	N. de avarias				
Comprar	0	1	2	3	4
0	0	15.000	30.000	45.000	60.000
1	2.000	2.000	17.000	32.000	47.000
2	4.000	4.000	4.000	19.000	34.000
3	6.000	6.000	6.000	6.000	21.000
4	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000

E a partir desta tabela, sabendo as probabilidades associadas a cada desenlace, podem calcular-se os valores esperados de todas as possibilidades referidas acima. Esse valor esperado aparece na coluna de totais da próxima tabela.

Peças a Comprar	Probabilidades e n. de avarias					Total
	0,1 0	0,4 1	0,3 2	0,1 3	0,1 4	
0	0	6.000	9000	4.500	6000	25.500
1	200	800	5.100	3.200	4.700	14.000
2	400	1.600	1.200	1.900	3.400	8.500
3	600	2.400	1.800	600	2.100	7.500
4	800	3.200	2.400	800	800	8.000

Conclui-se portanto que a solução mais barata em média — a que conduz ao menor valor esperado — consiste em comprar três peças suplentes agora. Note-se que, embora o valor esperado do menor custo seja 7.500, o custo imediato seria de 6.000. O restante é o dinheiro que, em média, é preciso desembolsar devido ao facto de que podem ser precisas mais de três peças.

Com informação perfeita, cada estaleiro compraria um número de peças suplentes igual ao número de avarias que sabia ia ter de enfrentar. Tudo se passaria como se, nas tabelas acima, a coluna "comprar" e a coluna "n. de avarias" fossem a mesma. Os custos, em cada caso, seriam sempre 2.000 a multiplicar pelo número de peças.

O valor esperado dos custos viria portanto dado por:

$$
\begin{array}{lcrcr}
\text{Probabilidade} & & \text{Custo} & & \text{Custo esperado} \\
0,1 & \times & 0 & = & 0 \\
0,4 & \times & 2.000 & = & 800 \\
0,3 & \times & 4.000 & = & 1.200 \\
0,1 & \times & 6.000 & = & 600 \\
0,1 & \times & 8.000 & = & 800 \\
\cline{5-5}
 & & \text{Total:} & = & 3.400
\end{array}
$$

e o valor máximo da informação perfeita seria a diferença entre os custos mínimos esperados sem informação, 7.500, e os custos esperados com informação, que são 3.400. A informação vale pois 4.100.

Resumo: Um conhecimento certo acerca do futuro desenlace permite ao gestor esco-lher a melhor alternativa em vez da melhor alternativa em média. O valor dessa informação dita perfeita será a diferença entre os lucros esperados antes e depois de conhecido o desenlace futuro.

2.4 O Valor da Informação Imperfeita

A informação é um bem e tem um preço. A estimativa do custo da informação perfeita a que os problemas anteriores se referem, deveria ajudar o gestor a decidir se sim ou não valeria a pena enfrentar os custos da obtenção de tal informação sobre o desenlace. Na prática, porém, a informação acerca do futuro nunca é perfeita. As análises do mercado ou os testes-piloto podem acertar ou errar. Isto, independentemente da sua qualidade, porque não há meio de conhecer o futuro com certeza.

Daí que a informação sobre o futuro é sempre *imperfeita* e sê-lo-á tanto mais quanto mais longe se tenha pretendido ver.

Quando se conhece a medida em que a informação conseguida é imperfeita, isto é, quando é possível quantificar a incerteza que tal informação não removeu, pode também calcular-se o valor — e portanto o máximo preço a pagar — por essa informação imperfeita. Este problema requer considerações Bayesianas para a sua resolução. Deve entrar-se em linha de conta com a noção de probabilidades a-posteriori, contida no teorema de Bayes.

Uma empresa quer lançar no mercado um novo produto mas não há a certeza de que será vendível. As hipóteses de sucesso dependem do estado do mercado e conhecem-se as seguintes probabilidades a priori:

Estado do mercado	Probabilidade a-priori	Lucro ou perda
Mau	0,3	(30.000)
Normal	0,5	10.000
Bom	0,2	40.000

O valor esperado dos lucros seria:

Probabilidade		Lucro		Lucro esperado
$0,3$	$\times$	(30.000)	$=$	(9.000)
$0,5$	$\times$	10.000	$=$	5.000
$0,2$	$\times$	40.000	$=$	8.000
		Total:	$=$	4.000

A administração acha que seria vantajoso dispôr de mais alguma informação sobre o mercado, a fim de tomar uma decisão mais abalizada. Pensa-se que um bom estudo do mercado seria capaz de fornecer informação imperfeita da forma que a seguir se mostra:

Se o estudo	O estado do mercado é:		
indicar	Mau	Normal	Bom
Mau	0,8	0,2	
Normal	0,2	0,6	0,2
Bom		0,3	0,7

Quer dizer, se o estudo aponta para um mercado mau, a probabilidade de que ele seja mesmo mau é de 0,8. Se o estudo diz que o mercado estará normal, a probabilidade de que ele esteja mesmo normal é de 0,6, ao passo que as probabilidades de que ele seja bom ou mau são de 0,2 ambas — e por aí fora.

O problema agora consiste em saber quanto medem as probabilidades capazes de expressar a verosimilhança do mercado ser bom, normal ou mau, *depois* dos resultados do estudo serem conhecidos. São estas as probabilidades ditas a-posteriori por englobarem duas fontes de informação: O conhecimento incerto que do mercado têm os gestores antes do estudo, mais o acréscimo em conhecimento que o estudo trás consigo.

Estas probabilidades a-posteriori calculam-se (neste caso) multiplicando as probabilidades correspondentes a acontecimentos subsequentes. A tabela seguinte mostra este cálculo e as probabilidades a-posteriori obtidas.

Probabilidade	Estado do	O estudo diz:		Probabilidade
a-priori	Mercado	Estado	Probabilidade	a-posteriori
0,3	Mau	Mau	0,8	0,24
		Normal	0,2	0,06
0,5	Normal	Mau	0,2	0,10
		Normal	0,6	0,30
		Bom	0,2	0,10
0,2	Bom	Normal	0,3	0,06
		Bom	0,7	0,14
Total:				1,00

Portanto, a probabilidade de o mercado ser mau quando o estudo diz que ele vai ser mau é de 24 hipóteses em 100. E a probabilidade de ele ser mau quando o estudo aponta para um mercado normal é de apenas seis hipótese em 100.

As probabilidades a-posteriori podem agrupar-se por soma. Se o gestor desta empresa desejar saber qual a probabilidade de o mercado ser normal ou bom quando o estudo aponta para um desenlace não-mau (normal ou bom) pode obter tal informação somando todas as probabilidades que obedecem ao seu critério: $0,30 + 0,10 + 0,06 + 0,14 = 0,60$.

Assume-se, é claro, que o estudo do mercado irá determinar se sim ou não o produto vai ser lançado. Um resultado do estudo que apontasse para um mercado mau levaria a empresa a cancelar a comercialização do produto. Sendo assim, a decisão de lançar o produto está ligada apenas a duas situações: O estudo indicar um mercado normal, ou indicar um mercado bom. Vamos ver qual é o lucro esperado neste caso.

O estudo Indicava	O mercado mostrou ser	A decisão foi de	Prob.	Lucro	Valor Esperado
Mau	Mau ou	Não lançar		0	0
	Normal	" "		0	0
Normal	Mau	Lançar	0,06	(30.000)	(1.800)
	Normal	" "	0,30	10.000	3.000
	Bom	" "	0,06	40.000	2.400
Bom	Normal	" "	0,10	10.000	1.000
	Bom	" "	0,14	40.000	5.600
Total:			1,00		10.200

Uma vez que o valor esperado do lucro com informação imperfeita é de 10.200 e o seu valor esperado sem informação é de 4.000, conclui-se que a informação vale 6.200 e um gestor estará desejoso de pagar até esse limiar para obtê-la.

Resumo: Um acrescento em informação acerca do desenlace traduz-se num novo conjunto de probabilidades ditas a-posteriori. O valor de tal acrescento em informação será a diferença entre os dois lucros esperados: antes e depois da nova informação.

Capítulo 3

Tópicos Avançados

Neste capítulo mostrar-se-á como simplificar as árvores de decisão em projectos de investimento de modo a torná-las interpretáveis. Primeiro, introduzir-se-á a noção de *Quantidade de Informação*. Ver-se-á depois como esta noção pode ser usada para comparar a incerteza associada a dois jogos. A seguir, explicar-se-á como medir o *Peso Causal relativo* dos atributos presentes numa árvore de decisão, obtendo assim uma hierarquização da *Robustez* das decisões quando comparadas com a das jogadas da natureza.

3.1 A Quantidade de Informação

A ideia de medir a quantidade de informação vem da engenharia de telecomunicações. Para efeitos de comunicação, a informação é aditiva: não importa o significado ou interesse do que é transmitido mas apenas a *quantidade*. Ao tomar uma decisão em que os desenlaces são incertos, o gestor pode usar este conceito para saber qual a quantidade de informação que lhe falta para conhecer o desenlace com certeza.

O número de dígitos necessários para distinguir um acontecimento de entre todos os possíveis é proporcional ao logaritmo do número N de acontecimentos possíveis. Por exemplo, perante 99 acontecimentos possíveis, a mensagem indicadora de que um deles acabou por dar-se requer dois dígitos decimais. Se forem 999 os acontecimentos possíveis, a mensagem requeriria três. Diz-se que $\log N$ mede a *variedade* de uma colecção de acontecimentos possíveis, para efeitos de comunicação. Esta variedade é a *quantidade de informação* que falta para que um desenlace, entre vários possíveis, passe a ser conhecido.

Quando existem regularidades na colecção de acontecimentos, a quantidade de informação que falta para se poder distingui-los deixa de ser $\log N$. Dá-se um *ganho* em informação ao saber-se que, por exemplo, k dos N acontecimentos estão agrupados numa classe, isto é, todos eles partilham uma característica comum. O conhecimento de tal atributo traz consigo uma certa quantidade de informação *a priori* sobre o desenlace. Este ganho por classificação deve pois ser subtraído à variedade total sempre que se pretenda saber a quantidade de informação que falta. Perante uma classificação múltipla, i.e., quando existem M atributos comuns a grupos de acontecimentos com $k_1, \cdots k_i, \cdots k_M$ casos cada, a quantidade de informação que ainda falta conhecer para identificar correctamente o desenlace será a diferença, H, entre a informação que faltava antes da classificação e a quantidade de informação média, G, que tal classificação trouxe consigo. Como

$$G = \sum_{i=1}^{M} \frac{k_i}{N} \log k_i, \tag{1}$$

a quantidade de informação que falta para prever o desenlace será

$$H = \log N - G = \log N - \sum_{i=1}^{M} \frac{k_i}{N} \log k_i. \tag{2}$$

H é conhecida pelo nome de "entropia". É a diferença entre a variedade e o ganho em informação obtido com o conhecimento *a priori*.

A Entropia é uma medida da incerteza de desenlaces futuros. Quando $H = 0$, não existe nenhuma falta de informação sobre o desenlace. O significado de $\log N = G$ é que cada um dos desenlaces pode ser completamente descrito pelos seus atributos. Trata-se pois de um desenlace *certo*. No pólo oposto, $H = \log N$, não existe nenhuma informação *a priori* sobre o desenlace. A incerteza é máxima e iguala a própria variedade.

Qual a quantidade de informação que falta e qual a já existente *a priori* sobre a cor de uma bola que se vai extrair de uma urna, quando se sabe que existem apenas duas cores e que das 10 bolas que a urna contém, duas são de uma cor e as oito restantes são de outra?

Neste caso, $N = 10$ e a variedade será $\log 10 = 1$. Mas sabe-se que existem apenas duas classes de bolas, 1 e 2, com um número de casos $k_1 = 8$ e $k_2 = 2$. Logo, o ganho em informação *a priori* será

$$\begin{aligned} G &= \tfrac{k_1}{N} \log k_1 + \tfrac{k_2}{N} \log k_2 \\ &= \tfrac{8}{10} \log 8 + \tfrac{2}{10} \log 2 \end{aligned}$$

e a informação que falta será, em vez de $log 10$,

$$H = \log 10 - \left(\frac{8}{10}\log 8 + \frac{2}{10}\log 2\right) = 0,217$$

No caso de existirem 12 bolas também de duas cores, sendo $k_1 = 9$ e $k_2 = 3$,

$$\begin{aligned} H &= \log 12 - \left(\tfrac{9}{12}\log 9 + \tfrac{3}{12}\log 3\right) \\ &= 1,079 - (0,75 \times 0,954 + 0,25 \times 0,477) = 0,244. \end{aligned}$$

Conclui-se que a falta de informação quanto ao desenlace é maior neste segundo caso. Em jogos simples como os enunciados acima qualquer gestor chega instintivamente à mesma conclusão. Porém, quando se pretende comparar a incerteza associada a decisões que desencadeiam respostas complicadas da natureza, como acontece nas árvores de decisão, pode não ser evidente qual das alternativas acarreta menor incerteza.

Nas árvores de decisão é costume usarem-se probabilidades, p_i, para quantificar a verosimilhança de cada desenlace, i. Mas a forma como as probabilidades medem expectativas não é sugestiva. Seria desejável medir, com uma só observação, a expectativa associada a jogos sequenciais complicados como os que se encontram em árvores de decisão. Isto facilitaria a tomada de decisões. É fácil de ver que H, tal como foi definida em (2), pode ser escrita em termos da colecção de probabilidades, $p_1, \cdots p_i, \cdots p_M$ que caracteriza um jogo:

$$H = \log N - \sum_{i=1}^{M} \frac{k_i}{N}\log k_i \quad \text{tendo presente que} \quad \frac{k_i}{N} = p_i \quad \text{virá} \quad H = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log p_i \qquad (3)$$

Para entender o interesse de H, basta pensar que uma probabilidade de $1/2$ associada ao desenlace i mede algo muito diferente consoante se trate de um jogo com dois ou com seis desenlaces. No primeiro caso, expressa expectativas nulas ou ausência de informação *a priori*. No segundo, expressa uma expectativa forte a favor da ocorrência de i. Um outro exemplo da utilidade de H é dado pela árvore de decisão representada na figura 9.

Esta figura mostra uma decisão à qual se segue um entre dois jogos envolvendo dois possíveis desenlaces com probabilidades de ocorrência de p_1 e $p_2 = 1 - p_1$. Ao contrário do que seria intuitivo, a diferença entre uma incerteza dada por

$$p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e a incerteza gerada por} \quad p_1 = \frac{1}{3},\ p_2 = \frac{2}{3}$$

é negligenciável e não merece ser tida em consideração excepto quando o jogo associado a cada decisão tem que repetir-se muitas vezes. Tal facto torna-se visível ao comparar

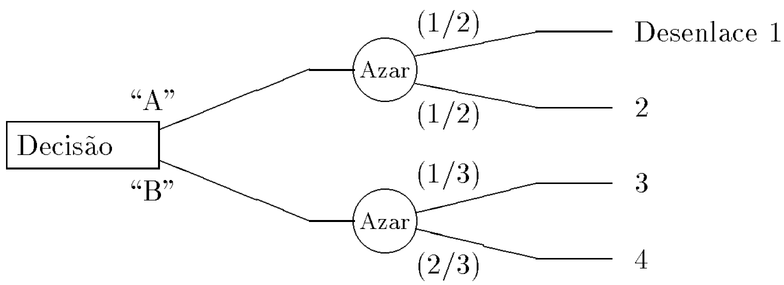


Figura 9: Um elemento básico de qualquer árvore de decisão. A uma decisão de um gestor ("A" ou "B") segue-se a "resposta da natureza". As probabilidades associadas a cada desenlace estão entre parêntesis.

PROBABILIDADES	ENTROPIA	PROBABILIDADES	ENTROPIA
1/2 e 1/2	0.30	1/5 e 4/5	0.22
1/3 e 2/3	0.28	1/10 e 9/10	0.14
1/4 e 3/4	0.24	1/20 e 19/20	0.09

Tabela 1: Relação entre Entropia e probabilidade num jogo com dois desenlaces.

a entropia de cada um deles (tabela 1). Não há diferença significativa na entropia de um jogo onde as probabilidades são $\{1/2, 1/2\}$ e de outro onde elas são $\{1/3, 2/3\}$. As diferenças só começam a ser importantes a partir de 1/3. Na figura 9, apesar das probabilidades parecerem indicar uma quebra na incerteza quando a decisão é "B", esta é na realidade mínima.

Resumo. Dados N desenlaces possíveis, chama-se "variedade" a $\log N$. A quantidade de informação que falta para prever um desenlace, ou "entropia", é

$$H = \log N - \sum_{i=1}^{M} \frac{k_i}{N} \log k_i$$

onde M é o número de atributos comuns a grupos de acontecimentos e $k_1, \cdots k_i, \cdots k_M$ é o número de casos de cada. A entropia é a diferença entre a variedade e o ganho em informação obtido com um conhecimento *a priori* de regularidades na colecção de acontecimentos. H mede a incerteza de desenlaces futuros e pode ser expressa em função das probabilidades associadas aos desenlaces,

$$H = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log p_i,$$

e a sua utilidade consiste em transmitir ao gestor uma noção mais correcta da incerteza que enfrenta, além de tornar comparáveis as incertezas.

3.2 O Peso Causal de uma Decisão

As árvores de decisão contêm dois tipos diferentes de atributos: aqueles que dependem dos gestores — as decisões — e aqueles que não dependem — as jogadas da natureza ou respostas do azar —. Estes últimos são o elemento probabilístico. Ao gestor interessa ser capaz de avaliar o peso causal das decisões quando comparadas com o dos atributos que ele não controla. De facto, há decisões que contribuem muito para o desenlace e outras pouco. Projectos há em que certas decisões não contribuem em nada para o desenlace, apesar de aparentarem importância.

O facto de que existe um nexo causal, forte ou fraco, entre decisões e desenlace, está na base da ideia de robustez que agora se apresenta. As decisões robustas serão aquelas que, num dado projecto, tiverem mais peso causal do que os atributos que o gestor não controla.

Numa árvore de decisão, a verosimilhança de cada desenlace calcula-se multiplicando as probabilidades associadas a todos os atributos ao longo do percurso que conduz a esse desenlace. Esta verosimilhança tem uma interpretação intuitiva: ela é a frequência esperada (relativa) de esse desenlace quando, hipoteticamente, o projecto se repete muitas vezes nas mesmas condições. Para obter o peso causal relativo de cada atributo, basta aplicar ao conjunto de desenlaces, respectivas frequências esperadas e atributos, o algoritmo conhecido pelas siglas "ID3". Como resultado, obtém-se uma árvore de regras. Se, nessa árvore de regras, os atributos que o gestor controla se encontrarem mais perto da raiz do que aqueles que o gestor não controla, então esses atributos têm maior peso causal: são robustos.

O algoritmo ID3 ("Iterative Dichotomizer 3") foi proposto em 1979 por Quinlan [5] com base em trabalhos de Hunt, Martin e Stone [3]. A finalidade desta ferramenta era a obtenção de árvores de regras a partir de experiência acumulada. Pouco depois, Breiman *et al.* [2] propuseram um algoritmo semelhante mas orientado para problemas de classificação estatística. Em 1990, Berry e Trigueiros [1] mostraram que o algoritmo ID3 transforma estruturas sequenciais de probabilidades num desenho da importância relativa de cada atributo.

O exemplo simples de árvore de decisão com o qual se ilustrará esta metodologia está representado esquematicamente na figura 10. O atributo "Programa" é uma decisão. O gestor pode escolher entre os programas "A" ou "B". O atributo "Procura" é um acontecimento incerto que não depende do gestor (uma "jogada da Natureza"). No alto da árvore podem ver-se os desenlaces possíveis com a forma de um Valor Actual Líquido (NPV). Como é prática corrente, só interessa saber se os NPV são positivos ou negativos. Vamos

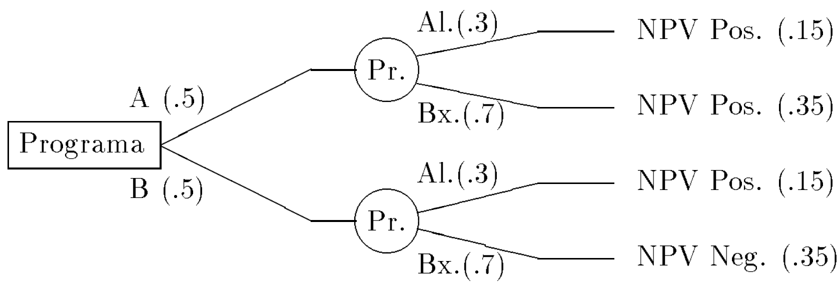


Figura 10: Uma árvore de decisão muito simples. *Pr.* é o atributo Procura. Entre parêntesis, a verosimilhança de cada classe.

VALOR ACTUAL LIQUIDO:	PROCURA	PROGRAMA	FREQUÊNCIA
Positivo (+)	Alta	A	15
Positivo (+)	Baixa	A	35
Positivo (+)	Alta	B	15
Negativo (−)	Baixa	B	35

Tabela 2: O conjunto de desenlaces, seus atributos e frequências esperadas.

descrever o uso do algoritmo ID3 por etapas:

Transformar os desenlaces para que sejam nominais: o Valor Actual Líquido (NPV) de cada desenlace é considerado como podendo ser apenas "positivo" ou "negativo". É esta a informação que importa quantificar em projectos de investimento. Só é recomendável o uso do ID3 quando desenlaces nominais fazem sentido.

Construir o conjunto de observações: a tabela 2 mostra este conjunto. Cada desenlace aparece associado com os seus atributos e com a respectiva verosimilhança, escrita como se fosse uma frequência. A verosimilhança foi calculada atribuindo iguais probabilidades aos atributos que são decisões do gestor (neste caso, 1/2) e depois multiplicando as probabilidades associadas ao atributo "Programa" pelas associadas ao atributo "Procura". Multiplicando depois esta verosimilhança por um factor arbitrário, o mesmo para todos os desenlaces, obteve-se uma "frequência". Tudo se passa como se existisse uma amostra com tantos casos quantos os desenlaces, depois de multiplicados por um factor proporcional à sua verosimilhança. Na tabela 2, a coluna "frequência" foi obtida multiplicando por 100 a verosimilhança de cada desenlace.

Aplicar o algoritmo ID3 a esta amostra: O ganho referido acima,

$$G = \sum_i \frac{k_i}{N} \log k_i$$

ou outra medida semelhante, como o popular Qui-Quadrado, é a estatística que o algoritmo

ID3 maximiza. O ID3 começa por determinar qual o atributo que mais explica o desenlace quando G é usado como critério. Depois, a amostra é dividida em tantas sub-amostras quantas as classes do atributo encontrado e o processo repete-se com cada uma destas sub-amostras. O resultado é uma "árvore de regras" com atributos embricados uns nos outros a começar pelos mais informativos.

Neste caso muito simples, a primeira etapa de execução do ID3 consistiria em gerar duas tabelas de contingência: Desenlace por Programa e Desenlace por Procura. Depois, ir-se-ia calcular o ganho em informação de cada uma destas tabelas. E por fim usar-se-ia como raiz da árvore de regras o atributo que aportasse um maior ganho em informação — uma maior causalidade — à previsão do desenlace. Tanto as referidas tabelas como uma medida aproximada do ganho, o Qui-Quadrado, são mostradas a seguir.

PROCURA	DESENLACE	
	$NPV > 0$	$NPV < 0$
Alta	30	0
Baixa	35	35
Qui-Quadrado: 23.1		

PROGRAMA	DESENLACE	
	$NPV > 0$	$NPV < 0$
A	50	0
B	15	35
Qui-Quadrado: 53.8		

Portanto o atributo Programa explica o desenlace melhor do que o atributo Procura. Sendo assim, o programa figurará como raiz da árvore de regras. Depois, considerar-se-iam separadamente os dois casos do programa ser A ou B e repetir-se-ia o processo para cada um deles. O resultado é esta estrutura lógica:

Se	Programa	é A então	o desenlace é NPV Positivo.
Se	Programa	é B então:	
	Se	Procura é Alta então	o desenlace é NPV Positivo.
	Se	Procura é Baixa então	o desenlace é NPV Negativo.

O ID3 transformou uma árvore de decisão numa árvore de regras. O atributo mais próximo da raiz, o Programa, é o de maior peso causal. Uma vez que se trata de uma decisão, conclui-se que a escolha do gestor influi no desenlace.

3.3 Um Caso: "Prism Paints Inc."

Nesta secção explorar-se-á um caso descrito na literatura, para ilustrar a quantificação da robustez das decisões. Trata-se de uma versão do problema descrito por Magee [4]. Eis alguns períodos da sua introdução.

> "Prism Paints vai precisar de decidir o destino a dar a uma das suas fábricas, muito pequena e incapaz de suprir a qualidade requerida pelo mercado. Existe uma considerável controvérsia entre os gestores sobre a melhor acção — modernizar a operação construindo boas instalações no local, fechar a fábrica e começar tudo de novo noutro local. (...). Existem 3 cenários operativos que parecem promissores:
>
> **Programa A:** Modernizar a fábrica e também expandir noutros locais. Este é o menos dispendioso dos três programas supondo uma procura anual baixa (inferior a uma margem cujo valor é conhecido).
>
> **Programa B:** Fechar a fábrica em questão e expandir noutro sítio. Este programa é o menos dispendioso quando a procura anual é média e se situa entre dois valores conhecidos.
>
> **Programa C:** Modernizar e também aumentar a fábrica em questão: Este programa é o menos dispendioso quando a procura é alta a ponto de subir acima de uma quota cujo valor é conhecido."
>
> "As alternativas enunciadas envolvem investimentos significativamente diferentes e parecem conduzir a posições marcadamente distintas em economia operativa também. Subjacente à controvérsia sobre o que fazer, está a incerteza quanto à procura futura do produto. (...). A evidência anterior e as previsões permitem estimar quão verosímil é cada nível de procura: sabe-se qual a probabilidade de que a procura venha a situar-se no nível baixo, médio ou alto, para cada uma das três etapas do projecto de expansão. Estas previsões aparecem condicionadas à procura na etapa precedente, isto é, a procura em cada etapa depende da procura em etapas anteriores." (ver a tabela 3 na página 36 onde se mostram estas probabilidades).
>
> "Os Meios Libertos são calculados a partir dos tipos de marketing, operações, engenharia e análise financeira mencionados em outros documentos. No caso de

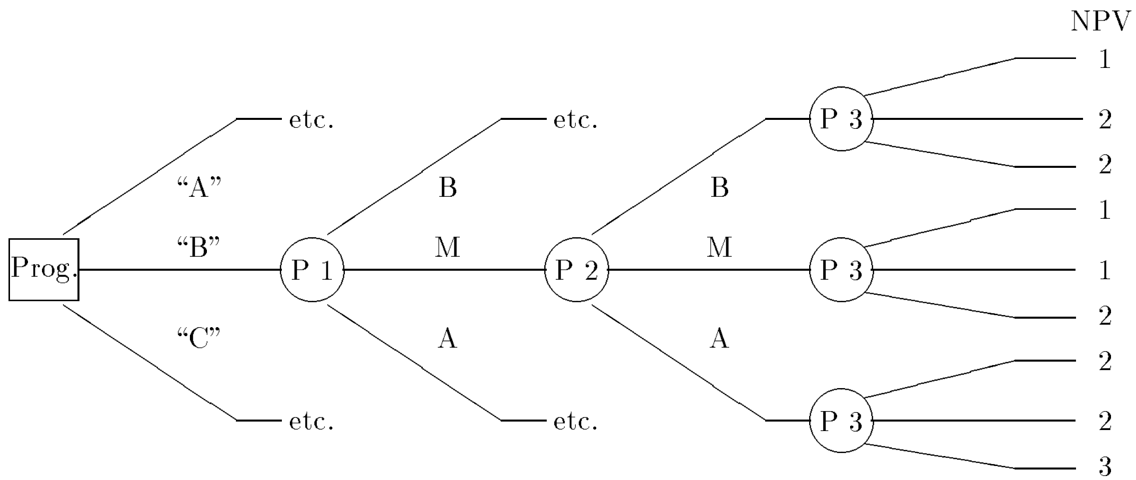


Figura 11: A parte central da árvore de decisão para Prism Paints Inc.

PRISM PAINTS INC.		Ano 2			Ano 3		
		Se a procura no ano 1 for:			Se a procura no ano 2 for:		
Nível da Procura	Ano 1	Baixa	Média	Alta	Baixa	Média	Alta
Baixa	.50	.35	.15	0	.20	.05	0
Média	.43	.50	.45	.40	.60	.35	.20
Alta	.07	.15	.40	.60	.20	.60	.80

Tabela 3: Probabilidades associadas às procuras Baixa, Média, e Alta no projecto para Prism Paints Inc.

> Prism Paints, um estudo da distribuição mostra que o lucro relativo a cada um dos três possíveis projectos pode ser expresso em Meios Libertos Líquidos anuais em termos dos três níveis da procura. (...). A administração de Prism Paints estabeleceu uma taxa de rendibilidade desejável, ou um custo de capital que ronda os 14% anuais. Esta é a taxa a ser usada para obter os Valores Actuais dos meios libertos previsionais, sempre que se pretender compará-los."

Conhecido o investimento que cada alternativa supõe, e estabelecida a taxa de rendibilidade, podem expressar-se todos os desenlaces sob a forma de um Valor Actual Líquido (NPV).

O NPV parece ser uma variável muito apropriada para algoritmos como o ID3, que requerem desenlaces de tipo nominal. Em projectos de investimento apenas dois desenlaces são importantes, e podem definir-se claramente. Porém, nas presentes simulações, o NPV foi autorizado a ter três valores: "Negativo", "Positivo", e "Lucros Extra".

No nosso caso, os NPV não foram copiados do texto original: construiu-se um modelo contendo todos os parâmetros deste problema e introduziu-se nele um grau regulável de aleatoriedade. Obtiveram-se assim várias colecções de NPV simulados, e respectivos atributos, cada uma constituindo um diferente cenário. Outro ponto em que o modelo é diferente do original é o facto de os três programas em questão, A, B, e C, permanecerem sem modificação ao longo do tempo. Não se considera, portanto, a possibilidade de saltar de um programa para outro a meio do projecto.

A procura é modelada como no original (Baixa, Média e Alta) e a cada caso corresponde uma verosimilhança expressa em probabilidades. Assim, a árvore de decisão resultante tem $3^4 = 81$ possíveis percursos, com desenlaces agrupados em três classes. A figura 11 (página 36) mostra o seu aspecto.

As árvores de regras obtidas a partir dos dois cenários simulados encontram-se na figura 12, na página 40 e na figura 13, na página 41. A tabela 4 mostra os 81 NPV e atributos correspondentes ao primeiro dos cenários gerados pelo simulador (os que originaram a árvore de regras da figura 12). O segundo dos cenários distingue-se do primeiro pela maior aleatoriedade que foi autorizada a entrar no modelo e pelo realce do peso do atributo Programa para o desenlace. Trata-se também de um cenário menos pessimista.

Como poderão os gestores beneficiar com este processamento? Em primeiro lugar, os 81 percursos, tal como se encontram nas árvores de decisão, originaram um número menor de regras depois de aplicado o algoritmo ID3. A árvore de regras é mais simples do que a árvore de decisão. E é de mais fácil interpretação também. Foi removida a redundância criada pelo facto de todos os desenlaces pertencerem a três classes apenas. A redução da complexidade obtida pelo ID3 é inversamente proporcional à aleatoriedade presente na relação atributos-desenlace.

É esperável que uma interpretação mais fácil de árvores de decisão por parte dos gestores seja agora possível. Ela ficar-se-á a dever apenas a esta eliminação da redundância. Como é sabido, o aspecto intrincado das árvores de decisão é uma das barreiras à sua maior utilização. Além disso, note-se como, nas árvores de regras obtidas, alguns ramos conduzem a zonas "boscosas", com muitos galhos, enquanto que outras conduzem rapidamente a um conjunto simples de desenlaces. Os primeiros, desdobram-se em atributos até atingirem um NPV final. Os últimos, pelo contrário, levam a um NPV dependente de poucos atributos. Até agora, pouca atenção tem sido dada na literatura ao problema da *complexidade da incerteza* em problemas de decisão. O ID3, devido à sua capacidade eliminadora de redundância, parece capaz de assinalar esta qualidade.

Os percursos simples são atractivos para os gestores. A incerteza em percursos simples tem pequena *dimensão*. Existem menos graus de liberdade a considerar. Na primeira das simulações apresentadas, uma procura elevada ou média no primeiro ano conduz o projecto para uma zona complexa. Os NPV positivos só se alcançam através de percursos complicados enquanto que os NPV negativos são simples de alcançar. Isto é um aviso útil para os gestores.

Como foi visto, existem *atributos de decisão*, e *atributos da natureza*. O algoritmo ID3 hierarquiza-os a todos de acordo com o seu poder para causar o desenlace. Os atributos mais relevantes serão os mais próximos da raiz na árvore de regras. Quando, entre os atributos relevantes, se encontra um atributo de decisão, o gestor tem o poder de determinar o desenlace. Caso contrário, o gestor tem pouco poder sobre o projecto.

Na primeira simulação, a escolha do programa — o atributo de decisão — encontra-se geralmente longe da raiz (ver página 40). A árvore de regras mostra aos gestores que a decisão é irrelevante para o resultado. O gestor tem muito pouco controlo sobre o projecto. O atributo mais causal é a procura no ano um. Para Prism Paints Inc., o ano decisivo será o primeiro. Note-se ainda como só uma baixa procura no primeiro ano torna o programa importante. Ao reparar que a escolha do programa só parece pesar quando a procura é baixa, um gestor concluiria que as alternativas postas ao investimento não estão proporcionadas à procura.

Quanto ao cenário que originou a segunda árvore de regras (página 41), a escolha do programa é o atributo com mais peso para o desenlace. Está-se perante uma decisão robusta. O gestor sabe que as suas decisões têm peso no processo.

PROCURA			VALOR ACTUAL LíQUIDO		
Ano 1	Ano 2	Ano 3	Programa 1	Programa 2	Programa 3
Alta	Alta	Alta	Positivo	Lucros extra	Lucros extra
Alta	Alta	Média	Positivo	Positivo	Positivo
Alta	Alta	Baixa	Positivo	Negativo	Negativo
Alta	Média	Alta	Positivo	Positivo	Positivo
Alta	Média	Média	Positivo	Positivo	Positivo
Alta	Média	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo
Alta	Baixa	Alta	Positivo	Negativo	Negativo
Alta	Baixa	Média	Negativo	Negativo	Negativo
Alta	Baixa	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo
Média	Alta	Alta	Positivo	Positivo	Positivo
Média	Alta	Média	Positivo	Positivo	Positivo
Média	Alta	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo
Média	Média	Alta	Positivo	Positivo	Positivo
Média	Média	Média	Positivo	Negativo	Negativo
Média	Média	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo
Média	Baixa	Alta	Negativo	Negativo	Negativo
Média	Baixa	Média	Negativo	Negativo	Negativo
Média	Baixa	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Alta	Alta	Positivo	Negativo	Negativo
Baixa	Alta	Média	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Alta	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Média	Alta	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Média	Média	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Média	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Baixa	Alta	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Baixa	Média	Negativo	Negativo	Negativo
Baixa	Baixa	Baixa	Negativo	Negativo	Negativo

Tabela 4: Prism Paints Inc: Valores originais do NPV para cada programa em função da procura nos três anos que dura o projecto.

- P 1
  - = B, P 2
    - = B, NPV = 1
    - = M, NPV = 1
    - = A, Prog.
      - = “A”, D 3
        - = M, NPV = 1
        - = A, NPV = 2
      - = “B”, NPV = 1
      - = “C”, NPV = 1
  - = M, P 2
    - = B, NPV = 1
    - = M, NPV = 1
    - = A, NPV = 2
  - = A, P 3
    - = B, NPV = 1
    - = M, NPV = 2
    - = A, NPV = 2 ou 3

Figura 12: Prism Paints Inc.: A árvore de regras obtida pelo algoritmo ID3 a partir do primeiro cenário simulado. NPV= 1 é o negativo; NPV= 2 é o positivo; NPV= 3 é o de “lucros extra”. P 1, P 2 e P 3 são a procura nos anos 1, 2 e 3.

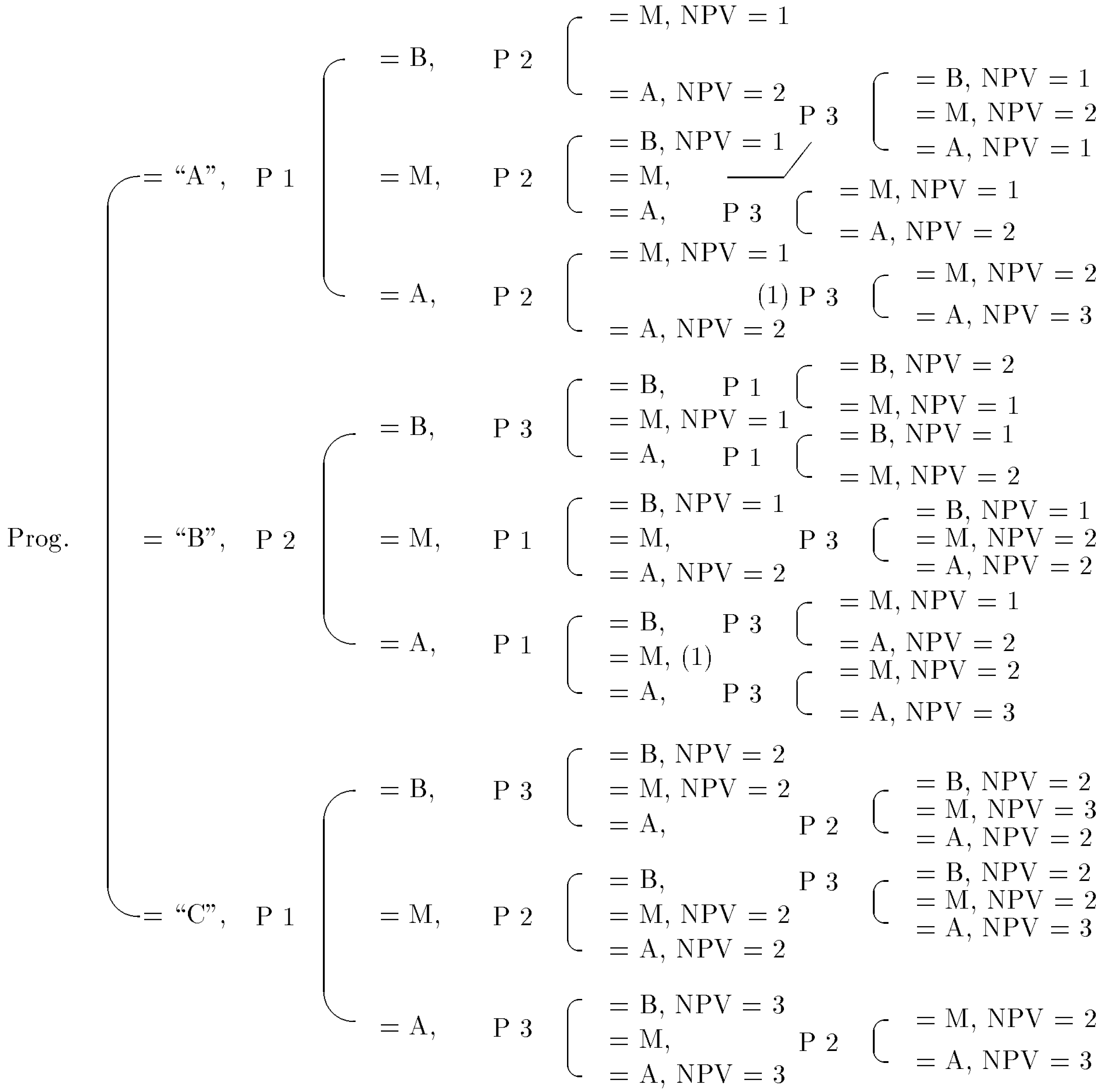


Figura 13: Prism Paints Inc.: A árvore de regras obtida pelo algoritmo ID3 a partir do segundo cenário simulado. NPV= 1 é o negativo; NPV= 2 é o positivo; NPV= 3 é o de “lucros extra”. P 1, P 2 e P 3 são a procura nos anos 1, 2 e 3.

Capítulo 4

Exercícios

Uma pequena empresa tem 5.000 para investir e avaliou o risco de duas alternativas. Os dados são:

Projecto A	
Probabilidade	Lucro
1/10	1.000
2/10	3.000
2/10	5.000
3/10	7.000
2/10	9.000

Projecto B	
Probabilidade	Lucro
4/10	2.000
2/10	7.000
4/10	10.000

A empresa escolheu o projecto B. Descobrir o tipo de política perante o risco — aversão ou afinidade — desta empresa.

Em ambos os casos expostos a seguir, indicar a melhor decisão e explicar os motivos.

(A): O director de marketing está a considerar uma entre duas possibilidades: distribuir um novo produto por todo o país, ou apenas localmente. A seguir mostram-se os dados sobre os quais a decisão se deve basear.

Distribuição nacional		
Procura	Probabilidade	Lucro
Alta	5/10	4.000
Média	25/100	2.000
Baixa	25/100	500

Distribuição local		
Procura	Probabilidade	Lucro
Alta	5/10	2.500
Média	25/100	2.000
Baixa	25/100	1.200

(B): A procura do mesmo produto está a crescer e o director de produção precisa de decidir se é melhor resolver o problema com horas-extra ou com a compra de uma nova máquina.

Estudos de mercado sugerem que há 2/3 de probabilidade de um crescimento de 25% nas vendas dentro de um ano. Mas a outra hipótese é que as vendas caiam 5%. Os desenlaces resultantes de cada decisão são expressos em meios libertos líquidos. Esta é a tabela que contém os dados sobre os quais a decisão deve ser tomada:

Procura		Meios Libertos	
	Prob.	Nova máquina	Horas-extra
Sobe	25%	400.000	360.000
Desce	5%	200.000	300.000

O dono de uma loja de vestuario para homem tem a oportunidade de comprar fatos de verão ao preço especial de 12.000 por peça, caso compre agora e em lotes de 20 peças. O preço de compra normal é de 16.000 e o preço de venda é de 24.000. Porém, se a loja chegar ao fim da estação com excedentes, ele vai ter que vende-los todos a 10.000 por peça. No caso oposto — excesso de procura — o dono pode sempre encomendar mais peças em qualquer altura pelo preço habitual de 16.000.

A melhor estimativa da procura, ao preço de 24.000 é:

Procura (unidades)	Probabilidade
20	0,2
40	0,4
60	0,3
80	0,1

Calcular quantas peças o dono deve encomendar agora e explicar os raciocínios feitos.

Uma fábrica de componentes para automóveis e está a enfrentar uma procura elevada para um dado produto. A fábrica está a trabalhar à capacidade máxima e a companhia tem que decidir se irá iniciar um sistema de turnos ou, pelo contrário, irá expandir a fábrica. As estatísticas da empresa prevêm que no próximo ano as vendas podem aumentar 15% com uma probabilidade de 0,6 ou diminuirem 5% com uma probabilidade de 0,4. Sendo assim, foi construida a seguinte tabela:

	Meios Libertos	
	15% crescimento das vendas	5% decréscimo das vendas
Turnos	210.000	150.000
Expansão da fábrica	220.000	130.000

Desenhar a árvore de decisão e, através do cálculo do valor monetário esperado, determinar a melhor decisão.

O director de marketing sugere que seria mais prudente planear para um período de dois anos, permitindo assim modificar as decisões mais tarde. Se as vendas diminuirem no primeiro ano, então a capacidade actual da fábrica serviria até ao fim do segundo ano e não seria preciso expandir nem introduzir turnos. Caso as vendas tenham caido no primeiro ano, as vendas durante o segundo ano podem ser altas, normais e baixas, com probabilidades 0,4, 0,4 e 0,2 respectivamente. Se as vendas cresceram no primeiro ano, as vendas no segundo podem ser altas, normais e baixas com probabilidades 0,3, 0,3 e 0,4 respectivamente.

No caso em que as vendas caem durante o primeiro ano, os meios libertos no fim do segundo ano são:

Decisão tomada	Meios Libertos no segundo ano		
para o primeiro ano	Alta	Normal	Baixa
Turnos	350.000	335.000	325.000
Expandir	345.000	325.000	310.000

Se as vendas aumentam no primeiro ano, a gestão enfrenta uma nova decisão no início do segundo ano. A escolha é entre a expansão da fábrica ou a introdução de turnos. Neste caso, a tabela que relaciona as vendas no segundo ano com os meios libertos é:

Ano 1	Ano 2	Alta	Normal	Baixa
Expandir	Expandir	410.000	395.000	380.000
Expandir	Turnos	425.000	408.000	395.000
Turnos	Expandir	390.000	360.000	345.000
Turnos	Turnos	395.000	370.000	355.000

Desenhar a árvore de decisão para o período de dois anos e, usando o critério do valor monetário esperado, determinar qual deve ser a estratégia desta empresa.

Bibliografia

[1] R. Berry and D. Trigueiros. Using the id3 algorithm to interpret the results of financial models. Technical report, University of East Anglia, School of Information Systems. Presented at the British Accounting Association Annual Conference, April 1990, Dundee, Scotland, 1990.

[2] L. Breiman, J. Freidman, R. Olshen, and C. Stone. *Classification and Regression Trees.* Wadsworth International, California, 1984.

[3] E. Hunt, J. Marin, and P. Stone. *Experiments in Induction.* Academic Press, New York, 1966.

[4] J. Magee. How to use decision trees in capital investment. *Harvard Business Review*, pages 79–96, September 1964.

[5] J. Quinlan. Discovering rules from large collections of samples — a case study. In D. Michie, editor, *Expert Systems in the Micro Electronic Age.* Edimburgh University Press, 1979.