Março 2009

Diana A. Mendes

OPTIMIZAÇÃO 2

SÉRIES — EX. RESOLVIDOS

- Estude a natureza das seguintes séries:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 3^{-1}}{(2^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$ série geométrica bem definida

$a = \frac{1}{4}$ primeiro termo

$r = \frac{3}{4}$ razão

Como $|r| = \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ a série é convergente e a sua soma é: $s = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 1$ //

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n \cdot 3^{1-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n \cdot 3 \cdot 3^{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2^n \cdot 3}{3^n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n$$ série geométrica bem definida

$a = \sqrt{3}$ primeiro termo

$r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ razão

Como $|r| = \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right| < 1 \Rightarrow$ a série geométrica é convergente e a sua soma é $s = \frac{a}{1-r} = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ //

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(2n+5)(3n+3)}$ grau numerador $= 1$

grau denominador $= 3$

utilizamos uma série de comparação (Dirichlet) com $\alpha = 3-1 = 2$

<u>Critério de comparação por passagem ao limite</u>

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$ onde a_n é o termo geral da série dada e b_n é o termo geral da série de comparação

$$a_n = \frac{2n+1}{n(2n+5)(3n+3)} \quad e \quad b_n = \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^2} \quad \left(\text{com } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ conv}\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n(2n+5)(3n+3)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{n(2n+5)(3n+3)} = \frac{1}{3}$$

Como $\left.\begin{array}{l} l \neq 0 \\ l \neq \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ as séries têm a mesma natureza, ou seja são convergentes (porque a série de comparação é convergente)

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(3 + \operatorname{sen} n)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log(3+\operatorname{sen} n)\right) = \log(3 + \underbrace{]-1,1[}_{\text{o seno no } \infty \text{ é um valor entre } -1 \text{ e } 1}) \neq 0 \Rightarrow$$

a série é divergente. (pela cond. necessária de conv.)

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{5}}$

Utilizamos o critério de comparação por passagem ao limite com a série de comparação $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/5}}$, como $\alpha = 1/5 < 1 \Rightarrow$ a série de comparação (Dirichlet) é divergente.

Então $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{1/5}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/5}} = 1 \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix}$

logo as séries tem a mesma natureza, ou seja são divergentes (porque a série de comparação era divergente)

No cálculo do limite utilizamos o caso notável $\boxed{\lim_{x_n\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = 1}$

$\boxed{(6)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$

Pelo <u>Critério geral de comparação</u>

$$-1 < (-1)^n < 1$$
$$-1+3 < 3+(-1)^n < 1+3$$
$$2 < 3+(-1)^n < 4$$
$$\frac{2}{2^n} < \underbrace{\frac{3+(-1)^n}{2^n}}_{a_n} < \underbrace{\frac{4}{2^n}}_{b_n} \text{ (série de comp.)}$$

A série de comparação $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ é uma série geométrica convergente (pois $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$) logo a série dada é <u>conv</u>.

$\boxed{(7)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n(n-2)}$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{5n(n-2)} = \frac{2}{5} \neq 0 \Rightarrow$

a série é divergente.

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \cdot (x-5)^n$ série de potências

termo geral : $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \Rightarrow |a_n| = \dfrac{1}{(2n+1)3^n}$

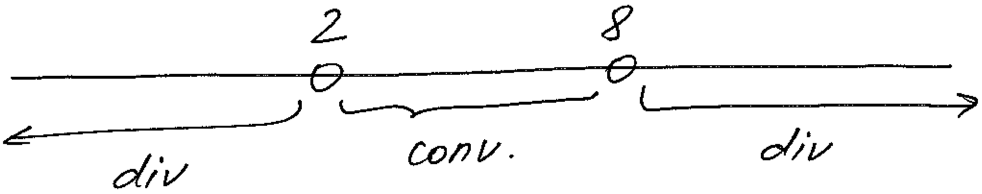
$x_0 = 5$

→ Raio de convergência

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)3^n}}{\frac{1}{(2n+3)3^{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)3^{n+1}}{(2n+1)3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)\cdot 3}{(2n+1)} = 3$$

Como $R = 3 \Rightarrow I =]5-3, 5+3[=]2, 8[$
é o intervalo de convergência



→ Estudamos a convergência da série nos extremos do intervalo de convergência

$\boxed{x = 2}$ $\displaystyle\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \cdot (2-5)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \cdot (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{(2n+1)\cancel{3^n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

Critério de comparação por passagem ao limite

Série dada: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

Série de comparação $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (divergente)

$$\Rightarrow \ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \begin{matrix}\neq 0\\ \neq \infty\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ as séries tem a mesma natureza, ou seja, são <u>divergentes</u> (pois a série de comparação é divergente)

$\boxed{x = 8}$ $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \cdot (8-5)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{3^n}}{(2n+1)\cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

A série dos módulos: $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1}$

é equivalente ao caso anterior $\Rightarrow$
série divergente.

$\boxed{(g)}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (x+3)^n$ série de potências

com $\boxed{x_0 = -3}$ e termo geral $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

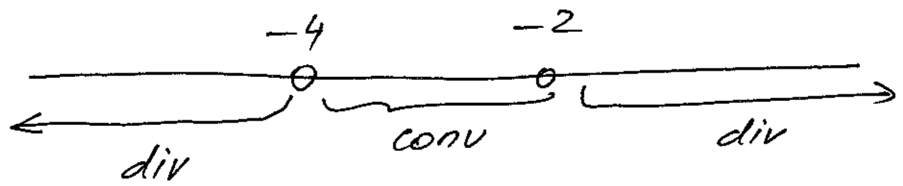
→ Raio de convergência : $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

→ Intervalo de convergência

$$I =]x_0 - R, x_0 + R[=]-3-1, -3+1[=]-4, -2[$$



→ Para $\boxed{x = -4}$ $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot (-4+3)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot (-1)^n$$

Série dos módulos : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$

$\Rightarrow$ série divergente

Para $\boxed{x=-2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot (-2+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

$\Rightarrow$ a série é divergente //