Escola de GESTÃO ISCTE

Instituto Superior de Ciências do Trabalho e Empresa

Curso: Engenharia de Telecomunicações e Informática, 1^o Ano

Cadeira: Análise Matemática I

Caderno 1 : Primitivas e Integrais

(Tópicos de teoria e exercícios)

Elaborado por: **Diana Aldea Mendes e Rosário Laureano**

Departamento de Métodos Quantitativos

Setembro de 2006

Utilizamos as seguintes designações e fórmulas trigonométricas:

- $\sin$ = seno, $\arcsin$ = função inversa
- $\cos$ = coseno, $\arccos$ = função inversa
- $\tan$ = tangente, $\arctan$ = função inversa
- $\cot$ = cotangente, arccot = função inversa
- $\sec$ = secante, arcsec = função inversa
- $\csc$ = cosecante, arccsc = função inversa
- $\sinh$ = seno hiperbólico, $\arg\sinh$ = função inversa
- $\cosh$ = coseno hiperbólico, $\arg\cosh$ = função inversa
- $\tanh$ = tangente hiperbólica, $\arg\tanh$ = função inversa
- $\coth$ = cotangente hiperbólica, $\arg\coth$ = função inversa
- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$
- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \tan(\pi - x) = -\tan x$
- $\cot(\pi - x) = -\cot x, \quad \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x, \quad \sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$

- $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}, \qquad \tan^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$
- $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
- $\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$
- $\cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
- $\sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = x$
- $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\sin(\operatorname{arccot} x) = \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\tan(\arctan x) = \cot(\operatorname{arccot} x) = x$
- $\tan(\arcsin x) = \cot(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\tan(\arccos x) = \cot(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\tan(\operatorname{arccot} x) = \cot(\arctan x) = \dfrac{1}{x}$
- $\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \tan 0 = 0$
- $\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}, \quad \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan \dfrac{\pi}{4} = 1$

- $\sin\dfrac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}, \quad \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

- $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\dfrac{\pi}{2} = 0, \quad \tan\dfrac{\pi}{2} = \infty$

- $\arcsin 0 = 0, \quad \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}, \quad \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}, \quad \arccos 1 = 0$

- $\arcsin(-1) = \dfrac{3\pi}{2}, \quad \arccos(-1) = \pi; \quad \arctan 0 = 0$

- $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}, \quad \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad \arctan(\pm\infty) = \pm\dfrac{\pi}{2}$

Outras fórmulas

$\ln A + \ln B = \ln AB$	$\ln A - \ln B = \ln\dfrac{A}{B}$	$A\ln B = \ln B^A$
$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\ln 0^+ = -\infty$
$\ln(+\infty) = +\infty$	$e^A e^B = e^{A+B}$	$\dfrac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$
$e^0 = 1$	$e^{-\infty} = 0$	$e^{+\infty} = +\infty$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A} + \sqrt{B}$	$\sqrt{A^n} = \left(\sqrt{A}\right)^n$
$\left(a^2 - b^2\right) = (a-b)(a+b)$	$\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$	$\sqrt{A/B} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$
$\left(a^3 - b^3\right) = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$	$\dfrac{A+B}{C} = \dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C}$	$\dfrac{A}{B+C} \neq \dfrac{A}{B} + \dfrac{A}{C}$
$\left(a^3 + b^3\right) = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$	$\left(\sqrt{A}\right)^3 = A\sqrt{A}$	$\sqrt[m]{A^n} = A^{n/m} = \left(\sqrt[m]{A}\right)^n$
$\lvert A\rvert < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < A < b$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[mn]{A}$	$A^{-n} = \dfrac{1}{A^n}$

- Distância entre dois pontos $P_1\left(x_1, y_1\right)$ e $P_2\left(x_2, y_2\right)$:

$$d\left(P_1, P_2\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Capítulo 1

Primitivas

1.1 Primitivas imediatas e quase-imediatas

Se $F(x)$ é uma função cuja derivada é $f(x)$, ou seja,

$$F'(x) = f(x)$$

então $F(x)$ diz-se **uma primitiva de** $f(x)$ (ou **uma antiderivada de** $f(x)$). Usamos a notação

$$F(x) = \int f(x)dx \quad \text{ou simplesmente} \quad F(x) = Pf(x).$$

Determinar uma primitiva de certa função envolve assim um processo inverso da derivação. No entanto, a primitiva de uma dada função não é única conforme ilustra o seguinte exemplo.

Exemplo: *As funções* x^3, x^3+2, $x^3-\sqrt{5}$ *são primitivas da função* $f(x)=3x^2$ *visto que*

$$\left(x^3\right)' = \left(x^3+2\right)' = \left(x^3-\sqrt{5}\right)' = 3x^2.$$

Temos então $\int 3x^2dx = x^3$, $\int 3x^2dx = x^3+2$, $\int 3x^2dx = x^3-\sqrt{5}$.

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então o mesmo sucede com $F(x)+C$, qualquer que seja $C \in \mathbb{R}$, ou seja, todas as primitivas de uma dada função f diferem entre si por uma constante C arbitrária. De facto, temos

$$(F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

para qualquer $C \in \mathbb{R}$. Podemos assim dizer que $F(x) + C$ é **a expressão geral das primitivas de** $f(x)$. Relativament ao exemplo anterior podemos escrever

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Se atendermos às regras de derivação, facilmente podemos estabelecer algumas regras de primitivação.

1.1.1 Regras de primitivação

Para uma função real $u = u(x)$ de variável real e $k \in \mathbb{R}$, temos

$\int 1 \; dx = x + C$ $\qquad$ $\int k \; dx = kx + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\qquad$ $\int u^n u' \; dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
para $n \neq -1$

$\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int u' e^u dx = e^u + C$

$\int a^u u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$

$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int u' \sin u \; dx = -\cos u + C$

$\int \cos x \; dx = \sin x + C$ $\qquad$ $\int u' \cos u \; dx = \sin u + C$

$\int \sec^2 x \; dx = \tan x + C$ $\qquad$ $\int u' \sec^2 u \; dx = \tan u + C$

$\int \csc^2 x \; dx = -\cot x + C$ $\qquad$ $\int u' \csc^2 u \; dx = -\cot u + C$

$\int u' \sec u \tan u \; dx = \sec u + C$ $\qquad$ $\int u' \csc u \cot u \; dx = -\csc u + C$

$\int u' \cosh u \; dx = \sinh u + C$ $\qquad$ $\int Pu' \sinh u \; dx = \cosh u + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} dx = \arcsin \frac{u}{a} + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$

$\int \frac{u'}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

$\int u' \tan u \; dx = -\log|\cos u| + C$ $\qquad$ $\int u' \cot u \; dx = \log|\sin u| + C$

$\int u' \sec u \; dx = \log|\sec u + \tan u| + C$ $\qquad$ $\int u' \csc u \; dx = \log|\csc u - \cot u| + C$

Dadas as propriedades operacionais da derivada estabelecemos as seguintes propriedades operacionais da primitiva.

1.1.2 Propriedades operacionais da primitiva

Dadas funções reais f e g de variável real x e k uma constante real, temos

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x))\, dx &= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \\ \int kf(x)dx &= k \int f(x)dx \end{aligned}$$

Considerando estas duas propriedades podemos afirmar que a primitiva goza da **linearidade**, ou seja,

$$\int (af(x) \pm bg(x))\, dx = a \int f(x)dx \pm b \int g(x)dx$$

para $a, b \in \mathbb{R}$. Com base nesta propriedade é possível efectuar **primitivação por decomposição**.

Exemplo 1: $\int (2x-1)dx = \int 2xdx - \int 1dx = 2\dfrac{x^2}{2} - x + c = x^2 - x + c$

Exemplo 2: $\int \tan x\ dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \dfrac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$

Exemplo 3: $\int \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^5}\right) dx = \int \dfrac{1}{x}dx + 2\int x^{-5}dx = \ln|x| + 2\dfrac{x^{-4}}{-4} + c$

Exemplo 4: $\int e^x \sin(3e^x)\, dx = \frac{1}{3}\int 3e^x \sin(3e^x)\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3e^x) + c$

Exemplo 5: $\int x^2 \left(x + \dfrac{2}{3}\right) dx = \int (x^3 + \dfrac{2}{3}x^2)dx = \int x^3 dx + \dfrac{2}{3}\int x^2 dx = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{9} + c$

Observação: Verifica-se que no Exemplo 5 (e em geral), **NÃO** é verdadeira a seguinte igualdade

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$

1.1.3 Exercícios Propostos

1. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções

(a) $f(x) = 3x^4$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$ $\qquad h(x) = 4x^2 - 5x + 1$

(b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x}$ $\qquad h(x) = x\sqrt{1+x^2}$

(c) $f(x) = x^3 + 5x - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^5}$ $\quad g(x) = x^2(x+2)^3$ $\quad h(x) = \dfrac{2x-1}{3}$

(d) $f(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x})^2}{x^5}$ $\quad g(x) = (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$ $\quad h(x) = \sqrt[m]{x^n}$

(e) $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$ $\quad g(x) = \sin^3 x \cos x$ $\quad h(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[5]{x}$

(f) $f(x) = e^{2x}$ $\quad g(x) = e^{\frac{x}{3}}$ $\quad h(x) = 5xe^{x^2}$

(g) $f(x) = 10^x$ $\quad g(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $\quad h(x) = x^3 e^{x^4}$

(h) $f(x) = e^{\sin 2x} \cos 2x$ $\quad g(x) = \dfrac{e^x}{1+4e^x}$ $\quad h(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}$ $\quad g(x) = \dfrac{7e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}$ $\quad h(x) = \dfrac{e^{6x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{1+3x^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+3x}$ $\quad h(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^5}{1+x^6}$

(l) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ $\quad g(x) = \cot 2x$ $\quad h(x) = \tan 3x$

(m) $f(x) = \sin(3x)\cos^4(3x)$ $\quad g(x) = \dfrac{4}{(x+1)\ln(x+1)}$

(n) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x \ln(\ln x)}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sec(\ln x)\tan(\ln x)}{x}$

(o) $f(x) = \dfrac{x}{1+3x^4}$ $\quad g(x) = \dfrac{7x^2}{1+4x^6}$ $\quad h(x) = \dfrac{7x^2}{5+3x^6}$

(p) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ $\quad g(x) = \dfrac{e^x + e^{2x}}{1+e^{2x}}$ $\quad h(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$

(q) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

(r) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

(s) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

(t) $f(x) = \cos 5x$ $\quad g(x) = \sin \dfrac{x}{3}$ $\quad h(x) = x^2 \cos x^3$

(u) $f(x) = \sec^2 7x$ $\quad g(x) = \dfrac{\sec^2 x}{\tan^5 x}$ $\quad h(x) = \sin^2 x$

(v) $f(x) = \sin^3 x$ $\quad g(x) = \cos^2 x$ $\quad h(x) = \tan \dfrac{x}{2} \sec^2 \dfrac{x}{2}$

(w) $f(x) = \cos^5 x$ $\quad g(x) = \tan^2 x$ $\quad h(x) = \tan^3 x$

2. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$ $\quad h(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$

(b) $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\sin^5 3x}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$

(c) $f(x) = (e^x+1)^2$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{(2+3\tan 5x)\cos^2 5x}$ $\quad h(x) = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$

(d) $f(x) = e^{2x}\left(7-e^{2x}\right)^{\sqrt{3}}$ $\quad g(x) = \dfrac{7}{e^{2x}+e^{-2x}}$ $\quad h(x) = \cot^2 x$

(e) $f(x) = \dfrac{x+7}{1+x^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$ $\quad h(x) = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[5]{3-x^4}}$ $\quad h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5-x^4}}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{7-4x^6}}$ $\quad g(x) = \dfrac{e^{2x}}{2-e^{2x}}$ $\quad h(x) = \dfrac{2}{1+x^2}\arctan^3 x$

3. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad g(x) = x^2+x-2$ $\quad h(x) = \dfrac{7}{3x+5}+\dfrac{1}{x^3}$

(b) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}$ $\quad h(x) = \dfrac{x+4}{x^2+8x+7}$

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x}$ $\quad g(x) = x\tan x^2$ $\quad h(x) = \dfrac{x+7}{1+x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$ $\quad h(x) = \dfrac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+7}$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2+4x+7}$ $\quad h(x) = \cos^3 x \sin 2x$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4x-x^2}}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\arctan^2 x}{1+x^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}\cos^2 x}$ $\quad h(x) = (x+1)^{15}$

(h) $f(x) = \sin(2x-3)$ $\quad g(x) = e^x \sin e^x$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^5}$

(i) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}$ $\quad h(x) = \dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}$

(j) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos^2(\sin^2 x)}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$ $\quad h(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$

(k) $f(x) = \cos^4 x \sin^3 x$ $\quad g(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ $\quad h(x) = e^{-3x+1}$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$

(m) $f(x) = \dfrac{1}{9+x^2}$ $\quad g(x) = (8-3x)\sqrt[5]{8-3x}$ $\quad h(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

(n) $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(o) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{x(1-x^2)}{1+x^4}$ $\quad h(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+9}$

(p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^2}{x^6+4}$

(q) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$ $\quad h(x) = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

(r) $f(x) = \dfrac{2x^2-6x+7}{\sqrt{x}}$ $\quad g(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{a^2+b^2x^2}$

(s) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x+1}}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ $\quad h(x) = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

(t) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\ln x} + \sin(\ln x)}{x}$ $\quad h(x) = 3^x e^x$

(u) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ $\quad g(x) = \sin^5 x$ $\quad h(x) = \sin^4 x \cos^4 x$

(v) $f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$ $\quad h(x) = \sin^3 x \cos^4 x$

(w) $f(x) = \sin^4 x$ $\quad g(x) = \sin^6 x$ $\quad h(x) = \cos^4 x$

4. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x(3+\ln x)}$ $\quad g(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ $\quad h(x) = x^2 \sqrt[3]{3+2x^3}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}$ $\quad g(x) = \dfrac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{x\left(4+\ln^2 x\right)}$

(c) $f(x) = \dfrac{4e^x}{1+e^{2x}}$ $\quad g(x) = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}$ $\quad h(x) = \dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}}$

(d) $f(x) = \tan^4 x \sec^2 x$ $\quad g(x) = \dfrac{\tan\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}}$ $\quad h(x) = \dfrac{\tan 5x - \cot 5x}{\sin 5x}$

(e) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{e^{\arctan x} + x\ln\left(x^2+1\right) + 1}{1+x^2}$

(f) $f(x) = \dfrac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad g(x) = \dfrac{2x + \ln\left(x^2+1\right)}{(1+x^2)\ln(x^2+1)}$ $\quad h(x) = \sqrt{8-2x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{5-2x}$ $\quad h(x) = e^x \sec^2 e^x$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\cot 3x}$ $\quad g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4}$ $\quad h(x) = x + x^{\frac{1}{2}}$

(i) $f(x) = \cot(5x-7)$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}}$ $\quad h(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

(j) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ $\quad g(x) = \dfrac{\cot x}{\sin^2 x}$ $\quad h(x) = \tan x \sec^2 x$

(k) $f(x) = \tan 4x - \cot \dfrac{x}{4}$ $\quad g(x) = \dfrac{\sin x - e^x}{\cos x + e^x + 2}$ $\quad h(x) = \cos^3 x \sin x$

(l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2 x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)$ $\quad h(x) = x\sqrt{x^2+1}$

(m) $f(x) = e^{x^2+4x+3}(x+2)$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ $\quad h(x) = \sqrt{x+9}$

(n) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ $\quad h(x) = \cot^5 x$

1.1.4 Propostas de resolução de alguns exercícios

1. Considere as seguintes resoluções:

(a) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

(b) $\int \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}dx = 5\int x^{-\frac{1}{3}}dx = 5\dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = 5\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \dfrac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

(c) $\int (x^3 + 5x - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^5})dx = \int x^3 dx + 5\int x dx -$
$4\int x^{-2}dx - \int x^{-5}dx =$
$\dfrac{x^4}{4} + 5\dfrac{x^2}{2} - 4\dfrac{x^{-1}}{-1} - \dfrac{x^{-4}}{-4} + C = \dfrac{x^4}{4} + 5\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{4x^4} + C$

(d) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx = \int (x\sqrt{x}+1)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)dx = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + x + C =$
$\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C$

(e) $\int \frac{1-2x+x^2}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - 2\int \frac{1}{x}dx + \int 1dx = \int x^{-2}dx - 2\int \frac{1}{x}dx + \int 1dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2\ln|x| + x + C = -\frac{1}{x} - \ln|x|^2 + x + C = -\frac{1}{x} - \ln x^2 + x + C = -\frac{1}{x} - 2\ln x + x + C =$

(f) $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

(g) $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$

(h) $\int \frac{e^x}{1+4e^x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4e^x}{1+4e^x}dx = \frac{1}{4}\ln(1+4e^x) + C$

(i) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}dx = \int x^{\frac{1}{2}-3}dx - \int e^x dx + \int \frac{1}{x}dx = \int x^{-\frac{5}{2}}dx - \int e^x dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C = -\frac{2}{3\sqrt{x^3}} - e^x + \ln|x| + C = -\frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x| + C =$

(j) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\left(x^2+1\right)}{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x\right| + C$

(k) $\int \frac{x^5}{1+x^6}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5}{1+x^6}dx = \frac{1}{6}\ln(1+x^6) + C$

(l) $\int \tan 3x\ dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}dx = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C$

(m) $\int \sin(3x)\cos^4(3x) = -\frac{1}{3}\int -3\sin(3x)\left[\cos(3x)\right]^4 dx = -\frac{1}{3}\frac{\left[\cos(3x)\right]^5}{5} + C = -\frac{1}{15}\cos^5(3x) + C$

(n) $\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx = \int \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\ln(\ln x)}dx = \ln|\ln(\ln x)| + C$

(o) $\int \frac{7x^2}{1+4x^6}dx = 7\int \frac{x^2}{1+(2x^3)^2}dx = \frac{7}{6}\int \frac{6x^2}{1+(2x^3)^2}dx = \frac{7}{6}\arctan 2x^3 + C$

(p) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1+(\sin x)^2}dx = \arctan(\sin x) + C$

(q) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-(x^4)\,2}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-(x^4)^2}}dx = \frac{1}{4}\arcsin x^4 + C$

(r) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx = \arcsin(\ln x) + C$

(s) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int x^3\left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{4}\int -4x^3\left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{4}\frac{\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} +$
$C = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

(t) $\int \cos 5x\ dx = \frac{1}{5}\int 5\cos 5x\ dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$

(u) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^5 x}dx = \int \sec^2 x\,(\tan x)^{-5}\,dx = \frac{(\tan x)^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4\tan^4 x} + C$

(v) $\int \tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = 2\int \tan\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\sec^2\frac{x}{2}dx = 2\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}{2} + C = \tan^2\frac{x}{2} + C$

(w) $\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x + C$

2. Considere as seguintes resoluções:

(a) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{1-\sin^2 x+\cos^2 x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx =$
$\int \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C$

(b) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}dx = \int \left(\frac{\sin x}{\sin^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}\right)dx = -\int -\frac{1}{\sin^2 x}dx + \int \cos x\,(\sin x)^{-3}\,dx =$

$$-\cot x + \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + C = -\cot x - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

(c) $\int \frac{1}{(2+3\tan 5x)\cos^2 5x}dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 5x}}{2+3\tan 5x}dx = \frac{1}{15}\int \frac{3\frac{5}{\cos^2 5x}}{2+3\tan 5x}dx =$
$\frac{1}{15}\ln|2+3\tan 5x| + C$

(d) $\int \frac{7}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = 7\int \frac{\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{e^{-2x}}{e^{2x}}}dx = 7\int \frac{\frac{1}{e^{2x}}}{1+(e^{-2x})^2}dx = -\frac{7}{2}\int \frac{-2e^{-2x}}{1+(e^{-2x})^2}dx =$
$-\frac{7}{2}\arctan\left(e^{-2x}\right) + C$

(e) $\int \frac{x+7}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{7}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + 7\int \frac{1}{1+x^2}dx =$
$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 7\arctan x + C$

(f) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{5\left(1-\frac{x^4}{5}\right)}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{5}\sqrt{1-\frac{x^4}{5}}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{\sqrt{5}}\right)^2}}dx =$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{\sqrt{5}}\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{5}} + C$

(g) $\int \frac{e^{2x}}{2-e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2e^{2x}}{2-e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|2-e^{2x}\right| + C$

3. Considere as seguintes propostas de resolução

(a) $\int \left(\frac{7}{3x+5} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int \frac{7}{3x+5}dx + \int \frac{1}{x^3}dx = 7\frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+5}dx + \int x^{-3}dx$
$= \frac{7}{3}\ln|3x+5| + \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{7}{3}\ln|3x+5| - \frac{1}{2x^2} + C$

(b) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \arctan x + C = -\frac{1}{x} + \arctan x + C$

(c) $\int x \tan x^2 dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\sin x^2}{\cos x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right| + C$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}dx = \int \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}+1}dx = \ln\left|\sqrt{1+x^2}+1\right| + C = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+1\right) + C$

(e) $\int \cos^3 x\,(2\sin x\cos x)\,dx = -2\int \cos^4 x\,(-\sin x)\,dx = -2\frac{\cos^5 x}{5} + C$

(f) $\int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

(g) $\int (x+1)^{15}dx = \frac{(x+1)^{16}}{16} + C$

(h) $\int e^x \sin e^x dx = -\cos e^x + C$

(i) $\int \sin 2x\left(1+\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \int 2\sin x\cos x\left(1+\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$

(j) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2\left(\sin^2 x\right)}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2\left(\sin^2 x\right)}dx = \tan\left(\sin^2 x\right) + C$

(k) $\int \cos^4 x\sin^2 x\sin x\ \ dx = \int \cos^4 x\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\ \ dx = \int \cos^4 x\sin x\ \ dx - \int \cos^6 x\sin x\ \ dx = -\int \cos^4 x\,(-\sin x)\,dx + \int \cos^6 x\,(-\sin x)\,dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$

(l) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+x}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}dx = 2\arctan\sqrt{x} + C$

(m) $\int (8-3x)\sqrt[5]{8-3x}dx = \int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx = \int (8-3x)^{\frac{6}{5}}\,dx = -\frac{1}{3}\int -3\,(8-3x)^{\frac{6}{5}}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{(8-3x)^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1} + C = -\frac{1}{3}\frac{5}{11}\sqrt[5]{(8-3x)^{11}} + C = -\frac{5}{33}\,(8-3x)^2\,\sqrt[5]{8-3x} + C$

(n) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = \int \frac{e^{2x}}{e^x}dx - \int \frac{1}{e^x}dx = \int e^x dx - \int e^{-x}dx = \int e^x dx + \int -e^{-x}dx = e^x + e^{-x} + C$

(o) $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx = \int \frac{x}{1+x^4}dx - \int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\arctan x^2 - \frac{1}{4}\ln\left|1+x^4\right| + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 - \frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right) + C$

(p) $\int \frac{(1+\sin x)\cos x}{(1+\sin x)\cos^2 x}dx = \int \frac{\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}}dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}dx$

$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(q) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2-1-\cos x}{1+\cos x}dx = 2\int \frac{1}{1+\cos x}dx + \int \frac{-1-\cos x}{1+\cos x}dx$

$= 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}dx - \int 1dx = 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx - \int 1dx = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$

(r) $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}dx = \int \frac{\frac{1}{a^2}}{1+\frac{b^2x^2}{a^2}}dx = \int \frac{\frac{1}{a^2}}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{b}\frac{1}{a}\int \frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a} + C$

(s) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx = \int \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{b^2x^2}{a^2}}}dx = \int \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}dx = \frac{1}{b}\int \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}dx =$
$\frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}+C$

(t) $\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{-\sin x+1+\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{-\sin x}{1+\sin x}dx +$
$\int 1dx = \int \frac{-\sin x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)\,(1-\sin x)}dx + \int 1dx =$
$\int \frac{-\sin x+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx + \int 1dx \; = \; \int \frac{-\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx + \int 1dx \; = \; \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx +$
$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx + \int 1dx =$
$\int(-\sin x)\,(\cos x)^{-2}\,dx + \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx + \int 1dx =$
$\int(-\sin x)\,(\cos x)^{-2}\,dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int 1dx + \int 1dx = \frac{\cos^{-1} x}{-1}$
$+\tan x + C = -\frac{1}{\cos x} + \tan x + C$

(u) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(4x^2+3x-2)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-\left[\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{41}{16}\right]}}dx =$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{41}{16}-\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2}}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{41}{16}}}}{\sqrt{1-\frac{\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{41}{16}}}}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{41}{16}}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{41}{16}}}\right)^2}}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{\frac{41}{16}}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{41}{16}}}\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{41}{16}}}+C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$$

1. (a) $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx +$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\tan^2 x dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C$

w. $\int \cos^4 x dx = \int \cos^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\frac{1+\cos 2x}{2}dx =$
$\frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx\right)$
$= \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right) = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}$
$\sin 4x + C = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$

1.2 Método de primitivação por partes

Dadas funções reais de variável real u e v, é valida a regra operacional do produto

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Aplicando primitivação obtemos

$$\int (uv)'\, dx = \int \acute{u}\acute{v}\ dx + \int uv'\ dx$$

ou seja,

$$uv = \int \acute{u}\acute{v}\ dx + \int uv'\ dx.$$

Temos então

$$\int \acute{u}\acute{v}\ dx = uv - \int uv'\ dx.$$

Esta igualdade indica como proceder para primitivar um produto de duas funções (que não possa ser visto como primitiva imediata): escolhe-se uma das funções para primitivar (u') e a outra para derivar (v). Assim, com base nesta igualdade, podemos praticar o **método de primitivação por partes**. Este método é efectivamente útil nos casos em que o produto uv' é de mais fácil primitivação do que $\acute{u}\acute{v}$. Quando pretendemos aplicar o método de primitivação por partes no cálculo de uma primitiva $\int \acute{u}\acute{v}dx$ há que escolher u' como algo que se sabe primitivar (para obter facilmente u). Conforme já foi referido, esta escolha deve ainda ter em conta o objectivo de encontrar em $\int uv'dx$ uma primitiva imediata.

Exemplo 1: *É nosso objectivo calcular a primitiva* $\int x\ln x\ dx$. *Tomando* $u' = x$ *e* $v = \ln x$ *há que calcular*

$$\begin{aligned} u &= \int u'\ dx = \int x\ dx = \frac{x^2}{2} \\ v' &= (\ln x)' = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Pela fórmula de primitivação por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int x\ln x\ dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Exemplo 2: *Pretendemos calcular a primitiva* $\int x^2e^xdx$. *Tomando* $u' = e^x$ *e* $v = x^2$ *há que calcular*

$$\begin{aligned} u &= \int u'\ dx = \int e^xdx = e^x \\ v' &= \left(x^2\right)' = 2x. \end{aligned}$$

Pela fórmula de primitivação por partes obtemos

$$\int x^2e^xdx = e^xx^2 - \int e^x\,(2x)\,dx = e^xx^2 - 2\int e^xx\ dx.$$

Contudo, $\int e^xx\ dx$ *(ainda) não é uma primitiva imediata. Conseguimos, no entanto, baixar o grau do polinómio que faz produto com a exponencial. Procedamos de novo à aplicação do método de primitivação por partes tomando de novo* $u' = e^x$ *e agora* $v = x$. *Temos* $u = e^x$ *e* $v' = 1$ *logo*

$$\begin{aligned} \int x^2e^xdx &= e^xx^2 - \int e^x\,(2x)\,dx = e^xx^2 - 2\int e^xx\ dx \\ &= e^xx^2 - 2\left(e^xx - \int e^x.1\ dx\right) \\ &= e^xx^2 - 2e^xx + 2e^x + C \\ &= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C \end{aligned}$$

A seguinte tabela fornece algumas pistas para a escolha referida acima:

Produto	u'	v
$f(x) \,.\, \exp x$	$\exp x$	$f(x)$
$f(x) \,.\, \sin x$	$\sin x$	$f(x)$
$f(x) \,.\, \cos x$	$\cos x$	$f(x)$
$f(x) \,.\, \tan x$	$\tan x$	$f(x)$
$f(x) \,.\, \cot x$	$\cot x$	$f(x)$
$f(x) \,.\, \arcsin x$	$f(x)$	$\arcsin x$
$f(x) \,.\, \arccos x$	$f(x)$	$\arccos x$
$f(x) \,.\, \arctan x$	$f(x)$	$\arctan x$
$f(x) \,.\, \text{arccot}\, x$	$f(x)$	$\text{arccot}\, x$
$f(x) \,.\, \ln x$	$f(x)$	$\ln x$

Observação: *Notemos que não são conhecidas regras de primitivação para as funções inversas* ln*,* arcsin*,* arccos*,* arctan *e* arccot *e por isso estas funções são tomadas como v (sobre o qual apenas é necessário derivar) na regra de primitivação por partes. A outra função a considerar sera $u' = 1$. Já para as respectivas funções directas* exp, sin, cos, tan *e* cot *são conhecidas algumas regras elementares de primitivação.*

1.2.1 Exercícios propostos

1. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x \sin 2x$ $\quad g(x) = xe^{-x}$ $\quad h(x) = x^n \ln x$

(b) $f(x) = x^2 \sin x$ $\quad g(x) = \ln x$ $\quad h(x) = (x^2 + 6x - 2) \exp \dfrac{x}{3}$

(c) $f(x) = \arctan \dfrac{x}{2}$ $\quad g(x) = x^3 e^{2x}$ $\quad h(x) = x^3 e^{x^2}$

(d) $f(x) = \arcsin 2x$ $\quad g(x) = e^x \sin 2x$ $\quad h(x) = \sin \dfrac{x}{2} \cos 3x$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$ $\quad g(x) = (x+3) \exp \dfrac{x}{2}$ $\quad h(x = (2x^2 + 1)e^{3x}$

(f) $f(x) = xe^{2x}$ $\quad g(x) = \arcsin \dfrac{x}{3}$ $\quad h(x = \dfrac{x+2}{3} \cos 5x$

(g) $f(x) = \ln^2 x$ $\quad g(x) = \arctan 3x$ $\quad h(x = e^{2x} \sin 3x$

(h) $f(x) = (2x-1) \sin 2x$ $\quad g(x) = x^7 e^{x^4}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{e^x}$

(i) $f(x) = x\sin x\cos x$ $\quad g(x) = \sin(\ln x)$ $\quad h(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ $\quad g(x) = \sin 2x\cos 3x$ $\quad h(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(k) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ $\quad g(x) = \arcsin^2 x$ $\quad h(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x^2}$

(l) $f(x) = \arctan\sqrt{x}$ $\quad g(x) = x\cos^2 x$ $\quad h(x) = \dfrac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$

(m) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ $\quad g(x) = \dfrac{\ln^3 x}{x^2}$ $\quad h(x) = e^x\sin x$

(n) $f(x) = e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)$ $\quad g(x) = \cos(\ln x)$ $\quad h(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$

(o) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$ $\quad g(x) = 3^x\cos x$ $\quad h(x) = \ln(3x)$

(p) $f(x) = x\tan^2 x$ $\quad g(x) = x^2 e^x\sin x$ $\quad h(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$

(q) $f(x) = x\sqrt{x+1}$ $\quad g(x) = x\ln(x+3)$ $\quad h(x) = x\arctan^2 x$

(r) $f(x) = \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$ $\quad g(x) = x^2\cos x$ $\quad h(x) = \cos^2(\ln x)$

1.2.2 Algumas soluções

Algumas soluções dos exercícios propostos:

1. $\int x\sin 2x\ dx = \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{2}x\cos 2x + c$

2. $\int xe^{-x}\ dx = -e^{-x}(x+1) + c$

3. $\int x^n\ln x\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \dfrac{1}{n+1}\right) + c$

4. $\int \arctan\sqrt{x}\ dx = x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + c$

5. $\int x\cos^2 x\ dx = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4}x\sin 2x + \dfrac{1}{8}\cos 2x + c$

6. $\int \dfrac{\ln x}{x^3}\ dx = -\dfrac{1}{2x^2}\ln(x\sqrt{e}) + c$

7. $\int \dfrac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$

8. $\int \ln\left(x^2+1\right)\ dx = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan x + c$

9. $\int \ln^2 x\ dx = x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + c$

10. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x}\left(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6\right) + c$

11. $\int (\arcsin x)^2\ dx = x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2x + c$

12. $\int e^x \sin x\ dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$

13. $\int e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)\ dx = \frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x - 5\cos 2x) + c$

14. $\int \sin(\ln x)\ dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$

15. $\int \cos(\ln x)\ dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c$

16. $\int e^x x\ dx = e^x(x-1) + c$

17. $\int x^3 e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right) + c$

18. $\int \frac{\cos x}{e^x}\ dx = \frac{\sin x + \cos x}{2e^x} + c$

19. $\int 3^x \cos x\ dx = \frac{3^x}{1+\ln^2 3}(\sin x + \ln 3\cos x) + c$

20. $\int \ln(3x)\ dx = x(\ln 3x - 1) + c$

21. $\int x\tan^2 x\ dx = \frac{x^2}{2}\tan^2 x + \frac{2x^2}{\cos^2 x} - x\tan x - \ln|\cos x| + c$

22. $\int x^2 e^x \sin x\ dx = \frac{x^2 e^x}{2}(\sin x - \cos x) + xe^x\cos x - \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$

23. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\ dx = \log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{1}{x}\arcsin x + c$

24. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\ dx = x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \sqrt{1+x^2} + c$

25. $\int x\sqrt{x+1}\ dx = \frac{2}{3}x\sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + c$

26. $\int x \ln(x+3)\ dx = \dfrac{x^2}{2}\ln(x+3) - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3x}{2} - \dfrac{9}{2}\ln(x+3) + c$

27. $\int x(\arctan x)^2\ dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\right)\arctan^2 x - x\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$

28. $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}\ dx = -\dfrac{x}{\sin x} + \ln|\csc x - \cot x| + c$

29. $\int x^3 e^{x^2}\ dx = \dfrac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right) + c$

30. $\int x^2\cos x\ dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

31. $\int x\sin x\cos x\ dx = \dfrac{1}{8}\left(4x\sin^2 x - 2x + \sin 2x\right) + c$

32. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$

33. $\int \cos^2(\ln x)\ dx = x\left(\cos^2(\ln x) - \cos(\ln x) - \sin(\ln x)\right) + c$

34. $\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x}\ dx = \dfrac{-x^2-5}{e^x} + c$

35. $\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\ dx = -x\cot x + \ln|\sin x| + c$

36. $\int \dfrac{\ln(\ln x)}{x}\ dx = \ln|\ln(\ln x) - 1| + c$

1.3 Primitivação de funções racionais

Relativamente à primitivação de funções racionais (proposta no ficheiro "Primitivação-parte2") queira considerar o seguinte: dada uma **função racional**

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

(isto é, a função $F(x)$ é o quociente de funções polinomiais $N(x)$ e $D(x)$ na variável x), $F(x)$ diz-se **própria** se $N(x)$ tem grau inferior a $D(x)$ e diz-se **imprópria** no caso contrário; relativamente à sua primitivação temos: **(i)** se $F(x)$ é imprópria proceda-se à divisão dos dois polinómios obtendo-se um quociente $Q(x)$ (chamada parte inteira de $F(x)$) e um resto $R(x)$

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

onde $R(x)$ tem grau inferior a $D(x)$; **(ii)** se $F(x)$ é própria então determinem-se as raizes do polinómio $D(x)$ e proceda-se à decomposição de $D(x)$ em factores de grau 1 (factores lineares) se as raizes forem reais e em factores de grau 2 (factores que são somas de quadrados) se as raizes forem complexas (pares de raizes conjugadas). Às raizes encontradas para $D(x)$ podemos fazer corresponder fracções simples (também simples de primitivar!...).A cada raíz real α de multiplicidade k fazemos corresponder k fracções simples, a saber,

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}}, \dots, \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^2}, \frac{A_k}{x-\alpha}$$

e a cada par de raizes complexas $a \pm bi$ de multiplicidade k também fazemos corresponder k fracções simples, a saber,

$$\frac{B_1x+C_1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}, \frac{B_2x+C_2}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{k-1}}, \dots, \frac{B_{k-1}x+C_{k-1}}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2}, \frac{B_kx+C_k}{(x-a)^2+b^2}.$$

As constantes presentes nos numeradores das fracções simples assim obtidas são calculadas pelo Método dos Coeficientes Indeterminados ou por outros métodos conhecidos (por exemplo, o método de Taylor). Para primitivação de funções racionais considere ainda a proposta de exercícios que se segue.

1.3.1 Exercícios Propostos

1. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções <u>*racionais*</u>:

   (a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+6}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3+x^2-2x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2-5x+2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^2}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}$

   (d) $f(x) = \dfrac{4}{x^4+1}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^5}{x^3-1}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}$

   (e) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^8+x^6}$ $\quad h(x) = \dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$

   (f) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{4x^3-x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{4x^2-8}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$

(h) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2(x-1)}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^3+x^2+2x+5}{(x^2+x+3)^2}$

2. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções racionais:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+9}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+10}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+8}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+6x+8}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+6x+9}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+6x+10}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+6x+10}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+6x^2+10x}$

(e) $f(x) = \dfrac{2x^3+2}{x^3+6x^2+8x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2x-3}{9+x^2-3x}$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+1}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{4x^2-9}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}$

(h) $f(x) = \dfrac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ $\qquad h(x) = \dfrac{x}{x^4-1}$

(i) $f(x) = \dfrac{x^4+x^2+5}{x^3+x^2+x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$

(j) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2-4x+5}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{3x^2-x+1}$ $\qquad h(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}$

(k) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2x+5}$ $\qquad g(x) = \dfrac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$

(l) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ $\quad g(x) = \dfrac{x^4-1}{(x-2)^2\, x^3}$ $\quad h(x) = \dfrac{x+1}{x^4+5x^2+4}$

(m) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{(x^2+x+1)\,(x-1)^2}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{(x^2-4x+3)\,(x^2+4x+5)}$

1.3.2 Algumas soluções

1. $P\dfrac{2x-1}{(x-1)\,(x-2)} = \ln\left|\dfrac{(x-2)^3}{x-1}\right| + c$

2. $P\dfrac{x}{x^2-5x+6} = \log\left|\dfrac{(x-3)^3}{(x-2)^2}\right| + c$

3. $P\dfrac{1}{x^2+2x+5} = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+1}{2} + c$

4. $P\dfrac{1}{3x^2-x+1} = \dfrac{2}{\sqrt{11}}\arctan\dfrac{6x-1}{\sqrt{11}} + c$

5. $P\dfrac{3x-2}{x^2-4x+5} = \dfrac{3}{2}\log\left|x^2-4x+5\right| + 4\arctan(x-2) + c$

6. $P\dfrac{x^3+1}{x^3+x^2-2x} = x - \dfrac{1}{2}\log|x| + \dfrac{2}{3}\log|x-1| - \dfrac{7}{6}\log|x+2| + c$

7. $P\dfrac{x+1}{2x^2-5x+2} = \log|x-2| - \dfrac{1}{2}\log\left|x-\dfrac{1}{2}\right| + c$

8. $P\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$

9. $P\dfrac{x}{x^4-1} = \dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right| + c$

10. $P\dfrac{x^4+x^2+5}{x^3+x^2+x} = \dfrac{x^2}{2} - x + 5\log|x| - 2\log\left|x^2+x+1\right| - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

11. $P\dfrac{x}{(x+1)\,(x-1)^2\,(x^2+1)} = -\dfrac{1}{8}\log\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \dfrac{1}{4\,(x-1)} - \dfrac{1}{4}\arctan x + c$

12. $P\dfrac{x}{(x-1)^2\,(x+1)^3} = -\dfrac{1}{8\,(x-1)} + \dfrac{1}{4\,(x+1)^2} - \dfrac{1}{16}\log\left|\dfrac{x-1}{(x+1)^2}\right| + c$

13. $P\dfrac{1}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + c$

14. $P\dfrac{1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2}\arctan x + c$

15. $P\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)} + \log\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + c$

16. $P\dfrac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)} = \dfrac{1}{8}\log\left|\dfrac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right| + c$

17. $P\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^2}{2} + 4x + \log\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + c$

18. $P\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \log\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c$

19. $P\dfrac{4}{x^4+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right| + \sqrt{2}\arctan\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + c$

20. $P\dfrac{4x^2-8}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)} + \log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\right| + \arctan x + c$

21. $P\dfrac{x^5}{x^3-1} = \dfrac{1}{3}\left(x^3 + \log\left|x^3-1\right|\right) + c$

22. $P\dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = x + 4\log\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right| + c$

23. $P\dfrac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7}{(x-2)^2} + c$

24. $P\dfrac{1}{x^8+x^6} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} - \arctan x + c$

25. $P\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \log\left|\dfrac{(x-1)^4}{x}\right| - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} + c$

26. $P\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right| + c$

27. $P\dfrac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} = 5x + \dfrac{1}{2}\log|x| - \dfrac{7}{3}\log|x-1| + \dfrac{16}{6}\log|x-4| + c$

28. $P\dfrac{x^3-1}{4x^3-x} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{9}{16}\log\left|x-\dfrac{1}{2}\right| + \dfrac{7}{16}\log\left|x+\dfrac{1}{2}\right| + \log|x| + c$

29. $P\dfrac{1}{x^3-4x^2+5x-2} = \log\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| + \dfrac{1}{x-1} + c$

30. $P\dfrac{x^2-x+14}{(x-2)(x-4)^3} = -\dfrac{13}{2(x-4)^2} + \dfrac{3}{x-4} + 2\log\left|\dfrac{x-4}{x-2}\right| + c$

31. $P\dfrac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2(x-3)^2} = -\dfrac{9}{2(x-3)} - \dfrac{1}{2(x+1)} + c$

32. $P\dfrac{x+1}{(x-1)^3} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} + c$

1.4 Método de primitivação por substituição

Para determinar a expressão geral de uma primitiva $\int f(x)\,dx$ pode ser conveniente substituir a variável x por uma nova variável t (*mudança de variável*) do seguinte modo: para $x = g(t)$ onde g é uma função injectiva, temos a taxa de variação

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dg}{dt} = g'(t)$$

donde $dx = g'(t)dt$, logo

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt.$$

Após resolver a primitiva do lado direito (resultante da substituição) procedemos à "recuperação" da variável original x atendendo a que $t = g^{-1}(x)$ (notemos que g foi tomada como injectiva). Temos então

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\ \ dt = \phi(t) = \phi(g^{-1}(x)) = F(x).$$

Por outro lado, dada $F(x) = \int f(x)\,dx$ temos F uma função da variável x e, por sua vez, $x = g(t)$ uma função da variável t. Como tal F pode ser considerada função da variável t

obtida por composição de funções. Atendendo à regra de derivação da função composta (dita *regra da cadeia*) temos

$$\frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(g(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx}.\frac{dg}{dt}$$

e, dada a forma como foi definida a função F, segue que

$$\frac{dF(x)}{dt} = f(x).\frac{dg}{dt} = f(x).g'(t) = f(g(t)).g'(t).$$

Isto implica que

$$F(x) = \int f(g(t)).g'(t)\ dt$$

ou seja,

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)).g'(t)\ dt$$

conforme afirmado anteriormente.

Consideremos o seguinte quadro que indica as substituições apropriadas quando estão presentes certos radicais. Estas substituições dizem-se *substituições trigonométricas*.

Função com	$x = g(t)$	$g'(t)$	$t = g^{-1}(x)$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$x' = a \cos t$	$t = \arcsin \frac{x}{a}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	$x' = a \sec^2 t$	$t = \arctan \frac{x}{a}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$x' = a \sec t \tan t$	$t = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$
e^{kx}	$\ln t$	$\frac{1}{t}$	e^x
$\ln^k x$	e^t	e^t	$\ln x$

Exemplo 1: *A primitiva* $\int e^{5x} dx$ *é imediata:*

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

No entanto, se efectuarmos a mudança de variável dada pela relação $5x = t$*, temos* $x = \frac{t}{5} = g(t)$ *logo* $g\prime(t) = \frac{1}{5}$*. Pela fórmula obtida para o método de primitivação por substituição temos então*

$$\int e^{5x} dx = \int e^t \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C$$

e, voltando à variável original x, temos

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

Notemos que foi essencial considerar a derivada $g'(t) = \frac{1}{5}$. Caso contrário, obteríamos

$$\int e^t dt = e^t + C = e^{5x} + C$$

que é um resultado errado já que $\left(e^{5x} + C\right)' = 5e^{5x}$ diferente da função e^{5x} que se primitivou.

Exemplo 2: *Pretendemos determinar $\int (\sqrt{x} + 3)^4 dx$. Consideremos a mudança de variável obtida pela relação $\sqrt{x} = t$. Temos $x = t^2 = g(t)$ logo $g'(t) = 2t$. Pela fórmula obtida para o método de primitivação por substituição temos então*

$$\begin{aligned}
\int (\sqrt{x} + 3)^4 dx &= \int \left(\sqrt{t^2} + 3\right)^4 2t\ dt = \int (t+3)^4 2t\ dt \\
&= 2 \int \left(t^2 + 6t + 9\right)\left(t^2 + 6t + 9\right) t\ dt \\
&= 2 \int (t^5 + 12t^4 + 54t^3 + 108t^2 + 81t) dt \\
&= 2 \left(\frac{t^6}{6} + 12\frac{t^5}{5} + 54\frac{t^4}{4} + 108\frac{t^3}{3} + 81\frac{t^2}{2}\right) + C \\
&= \frac{t^6}{3} + \frac{24t^5}{5} + 27t^4 + 72t^3 + 81t^2 + C
\end{aligned}$$

ou seja, voltando à variável original x,

$$\int (\sqrt{x} + 3)^4 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{24x^2\sqrt{x}}{5} + 27x^2 + 72x\sqrt{x} + 81x + C.$$

Notemos que, se optarmos por obter a expressão das primitivas sem recorrer a substituição, também temos

$$\begin{aligned}
\int (\sqrt{x} + 3)^4 dx &= \int (\sqrt{x} + 3)^2 (\sqrt{x} + 3)^2 dx = \int \left(x + 6\sqrt{x} + 9\right)\left(x + 6\sqrt{x} + 9\right) dx \\
&= \int \left(x^2 + 12x\sqrt{x} + 54x + 108\sqrt{x} + 81\right) dx \\
&= \int \left(x^2 + 12x^{\frac{3}{2}} + 54x + 108x^{\frac{1}{2}} + 81\right) dx \\
&= \frac{x^3}{3} + 12\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 54\frac{x^2}{2} + 108\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 81x + C \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{24x^2\sqrt{x}}{5} + 27x^2 + 72x\sqrt{x} + 81x + C.
\end{aligned}$$

Este exemplo é aqui apresentado também com o objectivo de evidenciar a importância de considerar a derivada $g'(t)$. De facto, se não for considerada essa derivada

$$\begin{aligned}
\int \left(\sqrt{t^2}+3\right)^4 dt &= \int (t+3)^4\, dt \\
&= \int \left(t^2+6t+9\right)\left(t^2+6t+9\right) dt \\
&= \int (t^4+12t^3+54t^2+108t+81)dt \\
&= \frac{t^5}{5}+12\frac{t^4}{4}+54\frac{t^3}{3}+108\frac{t^2}{2}+81t+C \\
&= \frac{x^2\sqrt{x}}{5}+3x^2+18x\sqrt{x}+54x+81\sqrt{x}+C
\end{aligned}$$

obtemos um resultado errado. Confirme, fazendo o cálculo da derivada, que

$$\left(\frac{x^2\sqrt{x}}{5}+3x^2+18x\sqrt{x}+54x+81\sqrt{x}+C\right)' \neq \left(\sqrt{x}+3\right)^4.$$

1.4.1 Exercícios Propostos

1. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2x-3}}$ $\quad h(x)=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$[Aula] $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$[Aula]

(c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$[Aula] $\quad g(x)=e^{\sqrt{x}}$[Aula] $\quad h(x)=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$[Aula]

(d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ $\quad h(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$[Aula]

(e) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ $\quad g(x)=\sin\sqrt[3]{x}$ $\quad h(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt{2+\sqrt[3]{3+x}}}$

(f) $f(x)=\sqrt{e^x-1}$ $\quad g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ $\quad h(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$

(g) $f(x)=x^2\sqrt{4-x^2}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

(h) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$ $\quad g(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$ $\quad h(x)=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}$

(i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ $\quad g(x)=x^3\left(2+3x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

(j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{1+\sqrt[5]{3x+1}}$ $\quad g(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}}$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

2. Utilize substituições trigonométricas para determinar a expressão geral das primitivasa das seguintes funções:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$[Aula] $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$[Aula]

(b) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{9-16x^2}}$[Aula] $\quad g(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$ $\quad h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}$[Aula]

(c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+(x-5)^2}}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2-3}}$ $\quad h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}$

(d) $f(x)=(3x-1)\sqrt{1-x-x^2}$ $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ $\quad h(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(e) $f(x)=\sqrt{9x^2-4}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x-5}}$ $\quad h(x)=\sqrt{1-x-x^2}$[Aula]

(f) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad g(x)=x^2\sqrt{2x+1-x^2}$ $\quad h(x)=\sqrt{a^2+x^2}$

(g) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+9}}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-(x-3)^2}}$ $\quad h(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x+3}}$

(h) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+2x+5)^3}}$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}$

Algumas soluções

1/2. Algumas soluções dos exercícios propostos

(a) $Pe^{5x}=\dfrac{1}{5}e^{5x}+c$

(b) $P\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}=\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\log\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+c$

(c) $P\dfrac{1}{x\sqrt{2x-3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{3}}+c$

(d) $P\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}=-\dfrac{6}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\log x-24\log\left(\sqrt[12]{x}+1\right)+c$

(e) $P\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}-2\log\left(1+\sqrt{x+1}\right)+c$

(f) $P\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}=2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+c$

(g) $P\dfrac{1}{1+e^x}=\log\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)+c$

(h) $P\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\log|\sqrt[6]{x}-1|+c$

(i) $Pe^{\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$

(j) $P\dfrac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}=\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\log x\right)\sqrt{1+\log x}+c$

(k) $P\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}=2\arctan\sqrt{e^x-1}+c$

(l) $P\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\sqrt{x^2-a^2}-a\arctan\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c$

(m) $P\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}-\log\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right|+c$

(n) $P\dfrac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}=4\sqrt[4]{(e^x+1)^3}\dfrac{3e^x-25}{21}+c$

(o) $P\sin\sqrt[3]{x}=-3\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}+6\cos\sqrt[3]{x}+c$

(p) $P\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

(q) $P\sqrt{e^x-1}=2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan\sqrt{e^x-1}\right)+c$

(r) $P\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+c$

(s) $P\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

(t) $P\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}=-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$

(u) $P\dfrac{x^2}{\sqrt{9-16x^2}}=\dfrac{9}{128}\left(\arcsin\dfrac{4x}{3}-\dfrac{4x\sqrt{9-16x^2}}{9}\right)+c$

(v) $P\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} = -\arcsin x - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$

(w) $P\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} = \dfrac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3} + c$

(x) $P\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$

(y) $Px^2\sqrt{4-x^2} = 2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2} + c$

(z) $P\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\dfrac{a}{x} + c$

() $P\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \arctan\sqrt{x^2-1} + c$

() $P\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\arctan\sqrt{x} + c$

() $P\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - x - 4\sqrt{x} - 4\log|\sqrt{x}+1| + c$

Capítulo 2

Integrais

2.1 Definição e interpretação

Seja f uma função real de variável real definida e contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$, $a < b$. O integral numa só variável (x)

$$\int_a^b f(x)dx$$

(frequentemente designado por **integral simples)** é definido como o limite de **somas de Riemann**

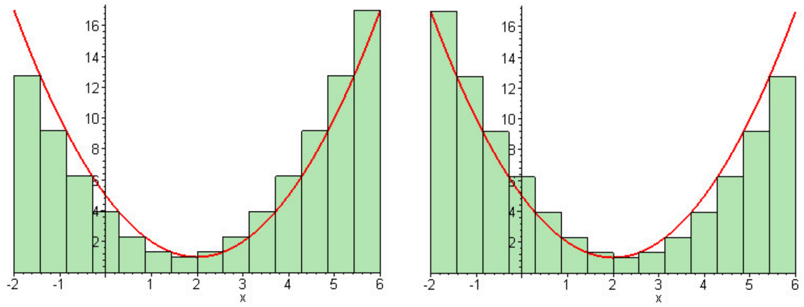
$$\int_a^b f(x)dx = \lim(\textit{somas de Riemann}),$$

que podem ser construidas como a seguir se expõe.

Consideremos a divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual amplitude e designe-se essa amplitude por Δx. Temos $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam x_0, x_1, $x_2, ..., x_{n-1}$, x_n, com $x_0 = a$ e $x_n = b$. Constrõem-se 2 somas de Riemann (especiais) ao considerar:

$$\begin{array}{l} \text{Soma pela esquerda} = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + ...f(x_{n-2}) \cdot \Delta x + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x \\ \text{Soma pela direita} = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + ...f(x_{n-1}) \cdot \Delta x + f(x_n) \cdot \Delta x. \end{array}$$

Em cada uma destas somas cada parcela (ou cada termo do somatório) é relativa a um dos n subintervalos: é o produto da amplitude de cada subintervalo pelo valor da função f calculada num certo valor x_i seleccionado nesse subintervalo(atenda às figuras 1 e 2)



Independentemente da forma como se construiu cada uma das somas de Riemann referidas acima, sempre se seleccionou um valor x_i em cada subintervalo e sempre se considerou a sua imagem $f(x_i)$ permitindo obter, então, uma soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \frac{b-a}{n}.$$

Definição: *Seja f uma função real de variável real definida e contínua no intervalo $[a, b]$, $a < b$. Define-se o integral definido à Riemann da função f de a até b como sendo o limite, na variável n, das somas de Riemann quando se consideram n subdivisões do intervalo $[a, b]$. Denota-se este integral por*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Tem-se então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \frac{b-a}{n}.$$

A função f é designada por função integranda e os números reais a e b por extremos ou limites de integração, limite inferior e limite superior, respectivamente. O intervalo $[a, b]$ é designado por intervalo de integração. Considera-se, ainda, que

$$\begin{array}{ll} \int_a^a f(x)dx = 0 & \text{(caso em que } a = b) \\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx & \text{quando } b < a \end{array}$$

Exemplo: Para o cálculo de $\int_0^6 xdx$ dividimos o intervalo $[0, 6]$ em n subintervalos de amplitude $\Delta x = 6/n$. Seleccionamos os valores x_i como sendo os extremos da direita em cada subintervalo, isto é, $x_0 = \Delta x$, $x_1 = 2 \cdot \Delta x$,...,$x_{n-1} = n \cdot \Delta x$. Temos, então,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(i\Delta x) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \Delta x \cdot \Delta x = (\Delta x)^2 \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= (\Delta x)^2 (1 + 2 + ... + n) = (\Delta x)^2 \frac{1+n}{2} n = \left(\frac{6}{n}\right)^2 \frac{1+n}{2} n = 18 \frac{1+n}{n}. \end{aligned}$$

Como tal,

$$\int_0^6 x dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \to \infty} 18 \frac{1+n}{n} = 18.$$

Devemos, no entanto, salientar que este procedimento é em geral difícil de efectuar para uma função arbitrária.

Problem 1 *Em que condições está garantida a existência do integral* $\int_a^b f(x)dx$?

Há que garantir a existência do limite considerado quando $n \to \infty$, ou seja, garantir a convergência da série numérica

$$\sum_{n \geq 0} f(x_n) \cdot \Delta x = \sum_{n \geq 0} f(x_n) \frac{b-a}{n}.$$

Definiu-se o integral $\int_a^b f(x)dx$ para funções f contínuas no intervalo $[a, b]$, intervalo limitado e fechado. O teorema de Weierstrass garante então que f admite neste intervalo um máximo e um mínimo, isto é, f é limitada neste intervalo.Isto garante a convergência da série acima e a existência da sua soma S que corresponde ao valor do integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Também está garantida a existência do integral no caso em que f tenha apenas um número finito de descontinuidade de 1^a espécie (também referidas frequentemente como descontinuidades de salto) no intervalo $[a, b]$. Sendo o número de descontinuidades finito torna-se possível considerar um número finito de integrais, cada um em intervalos onde a função seja contínua. A obtenção do integral $\int_a^b f(x)dx$ é possível pela seguinte propriedade dos integrais:

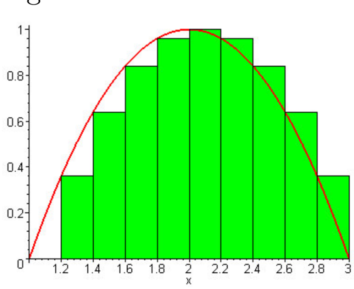
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad a < c < b$$

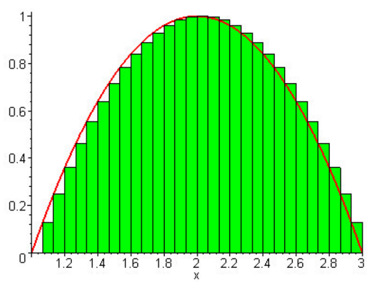
designada por **identidade de Chasles.**

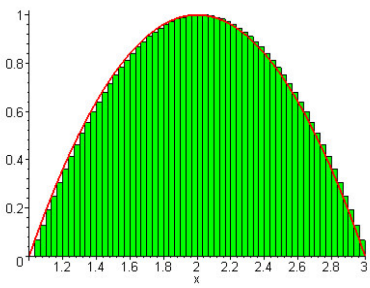
Consideremos, de seguida, que $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$. Sendo f uma função positiva no intervalo $[a, b]$, podemos interpretar cada parcela $f(x_i) \cdot \Delta x$ de uma soma de Riemann como a área de um rectângulo de base Δx e altura $f(x_i)$. A soma de Riemann que se considere corresponde, então, à soma das áreas de todos os rectângulos.

Cada soma de Riemann corresponde, portanto, a uma estimativa da área da região do plano limitada pelo gráfico da função f e pelo x-eixo, entre as rectas $x = a$ e $x = b$.

Quando é considerado um número cada vez maior de intervalos, ou seja, quando a amplitude Δx tende a ser cada vez menor, os "topos" dos rectângulos tendem a "ajustar-se" cada vez mais à curva do gráfico. Assim, a soma das áreas desses rectângulos tende a aproximar-se da área limitada entre a curva do gráfico e o x-eixo desde a até b (uma forma de efectuar essa diminuição de Δx seria dividir cada subintervalo ao meio, depois dividir novamente ao meio cada um destes últimos e assim por diante). Atenda às figuras seguintes.







Podemos, portanto, afirmar que

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{array}{l} \textit{Área da região do plano compreendida entre} \\ o\ gráfico\ de\ f(x)\ e\ o\ xx - eixo\ de\ x = a\ até\ x = b \end{array}$$

Observação: Uma outra interpretação do integral $\int_a^b f(x)dx$ pode ser feita quando f representa uma função densidade (digamos uma densidade de população ou a densidade de uma substância) no intervalo $[a, b]$. Neste caso, o integral calcula a população total ou a massa total da substância.

Observação: O integral $\int_a^b f(x)dx$ também pode ser interpretado como o trabalho realizado por uma força f quando o ponto material de aplicação da força se move em movimento rectílineo de $x = a$ para $x = b$.

2.2 Propriedades dos integrais - Integral definido/Indefinido

Seja f uma função real de variável real definida e contínua no intervalo $[a,b]$, $a<b$. Temos as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
\int_a^b k\cdot f(x)dx &= k\int_a^b f(x)dx, \quad k\in\mathbb{R}\\
\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx &= \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \quad \text{aditividade}\\
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= f(x_0);\quad x_0\in[a,b] \qquad \textbf{Teorema do valor médio}
\end{aligned}$$

Proposição: *Seja f uma função real de variável real definida e contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$, $a<b$. Se*

$$F(u)=\int_a^u f(x)dx$$

então $\dfrac{d}{du}\mathrm{F}(u)=f(u)$. Isto é, é válida a fórmula

$$\frac{d}{du}\int_a^u f(x)dx=f(u),$$

designada por fórmula de derivação do integral.

Observação (Integral Indefinido): *No caso em que $u(x)=x$ (i.e, u é a função identidade) esta proposição é enunciada como*

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx \Longrightarrow F'(x)=f(x)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=f(x).$$

No entanto, para evitar confundir os "papeis" dos vários $x's$ deve ser enunciada da seguinte maneira

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),$$

ou seja,

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \Longrightarrow F'(x)=f(x),$$

significando que $F(x)$ é simplesmente uma primitiva de $f(x)$.

Observação: *Como generalização da* ***fórmula de derivação do integral*** *temos*

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt = f(\varphi_2(x))\frac{d\varphi_2}{dx} - f(\varphi_1(x))\frac{d\varphi_1}{dx}$$

ou, mais geralmente,

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t,x)dt = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{df}{dx}dt + f(\varphi_2(x),x)\frac{d\varphi_2}{dx} - f(\varphi_1(x),x)\frac{d\varphi_1}{dx},$$

designada por regra de Leibnitz para a derivação sob o sinal de integral.

Exemplo 1: $\frac{d}{dx}\int_4^x t^2 dt = x^2 \cdot 1 - 4^2 \cdot 0 = x^2$.

Exemplo 2: $\frac{d}{dx}\int_1^5 \frac{t^3+1}{t^7}dt = \frac{5^3+1}{5^7} \cdot 0 - \frac{1^3+1}{1^7} \cdot 0 = 0$.

Exemplo 3: $\frac{d}{dx}\int_5^{3x} \left(x^2 + 5x + 7\right) dt = \int_5^{3x}(2x+5)dt + (x^2+5x+7)\cdot 3 - \left(x^2 + 5x + 7\right)\cdot 0 = 9x^2 + 20x - 4$.

Exemplo 4: $\frac{d}{dx}\int_5^{t^3} \cos x dx = \cos(t^3) \cdot 0 - \cos(5) \cdot 0 = 0$.

Exemplo 5: $\frac{d}{dx}\int_5^{3x} \left(x^2 t + 5x + 7\right) dt = \int_5^{3x}(2xt+5)dt + (x^2(3x)+5x+7)\cdot 3 - \left(x^2 \cdot 5 + 5x + 7\right)\cdot 0 = 18x^3 + 5x - 4$.

Teorema fundamental do cálculo integral *Sejam f uma função real de variável real definida e contínua no intervalo $[a,b]$, $a < b$, e $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Temos*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)_a^b = F(b) - F(a),$$

frequentemente designada por fórmula de Barrow.

Observação: *Este teorema é de grande utilidade prática no cálculo de integrais, desde que seja possível determinar uma primitiva da função integranda.*

As fórmulas de primitivação por partes e por substituição podem ser facilmente estendidas para o cálculo de integrais de uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$.

Exemplo (por partes): Para o cálculo do integral

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

há que salientar a função $f(x) = x \arcsin x/\sqrt{1-x^2}$ ser uma função contínua no intervalo limitado e fechado $\left[1/2, \sqrt{3}/2\right]$ e, por isso, o integral estar bem definido. Podemos, então, considerar o integral e efectuar primitivação por partes com

$$f = \arcsin x \quad \text{e} \quad g' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para primitiva de g' podemos considerar $g = -1/2 \cdot \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} / (1/2) = -\sqrt{1-x^2}$ e, para derivada de f, temos $f' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Aplicando a fórmula referida acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)dx\right)\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \\
&= \left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right)\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} - \left(\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)dx\right)\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \\
&= \left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right)\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} - \left(\int -1 dx\right)\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \\
&= \left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right)\Big|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} - (-x)\big|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo (substituição): Para o cálculo do integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$$

há que salientar a função $f(x)$ ser uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[2,3]$ e, por isso, o integral estar bem definido. Podemos considerar a mudança de variável $x = \sec t \equiv g(t)$ onde $g'(t) = \sec t \tan t$. Temos ainda $t_0 = \pi/3$ para $x = 2$ e $t_1 = \arccos 1/3$ para $x = 3$.

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx &= \int\limits_{\pi/3}^{\arccos 1/3} \frac{1}{(\sec t)^2 \sqrt{(\sec t)^2 - 1}} \sec t \tan t dt = \int\limits_{\pi/3}^{\arccos 1/3} \frac{\sin t}{\sqrt{(\tan t)^2}} dt \\
&= \int\limits_{\pi/3}^{\arccos 1/3} \frac{\sin t}{\tan t} dt = \int\limits_{\pi/3}^{\arccos 1/3} \cos t dt = (\sin t)\big|_{\pi/3}^{\arccos 1/3} = \sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

Atendamos que, na parte final dos cálculos,designamos $\arccos 1/3$ por Θ, ou seja, $\cos\Theta = 1/3$, o que permite considerar num triângulo rectângulo de hipotenusa 3 e um ângulo Θ cujo cateto adjacente mede 1. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos $\sin\Theta = \sqrt{8}/3$.

2.2.1 Exercícios Propostos

- Calcule o valor dos seguintes integrais definidos

1). $\int_1^2 \left(x^2+2x+1\right)dx$ 2). $\int_1^e \frac{1}{x}dx$ 3). $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

4). $\int_2^3 \frac{x+1}{x-1}dx$ 5). $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ 6). $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

7). $\int_0^2 (x+e^x)\,dx$ 8). $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$ 9). $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

10). $\int_4^9 e^{\sqrt{x}}dx$ 11). $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ 12). $\int_1^e \ln x dx$

13). $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ 14). $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$ 15). $\int_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt{(3-x)^3}}dx$

16). $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ 17). $\int_1^2 \frac{1}{x+x^3}dx$ 18). $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$

19). $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$ 20). $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ 21). $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

22). $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$ 23). $\int_0^{11} \sqrt{3+2x}dx$ 24). $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3}dx$

25). $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ 26). $\int_0^1 xe^{-x}dx$ 27). $\int_1^e \ln^3 x dx$

28). $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$ 29). $\int_{\sqrt{8/3}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}dx$ 30). $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

31). $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$ 32). $\int_{-2}^{-3} \frac{1}{x^2-1}dx$ 33). $\int_1^2 \ln\left(x+\sqrt{x}\right)dx$

34). $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$ 35). $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}dx$ 36). $\int_{1/2}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

37). $\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 38). $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$ 39). $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

- Calcule as derivadas dos seguintes integrais indefinidos:

1). $\frac{d}{dx}\int_4^x t^2 dt$ 2). $\frac{d}{dx}\int_x^5 \frac{t^3+1}{t^7}dt$ 3). $\frac{d}{dx}\int_5^{3x} \left(t^2+5t+7\right)dt$

4). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{1} \frac{t+1}{t^2+t+7}dt$ 5). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{x^3} \frac{t^2+1}{t}dt$ 6). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1}^{5x} e^{t^2}dt$

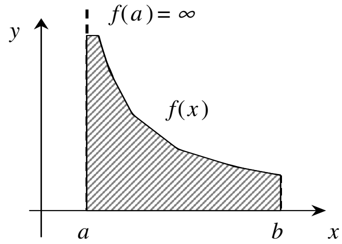
7). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{5}^{x^3} \cos t dt$ 8). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{3}^{4x-1} \frac{t^3+1}{t^2-7}dt$ 9). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{0}^{x^2} t^3 dt$

10). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{5-x}^{2x^3} t dt$ 11). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{4x}^{x^2} \sin t^2 dt$ 12). $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{x^2} t^3 dt$

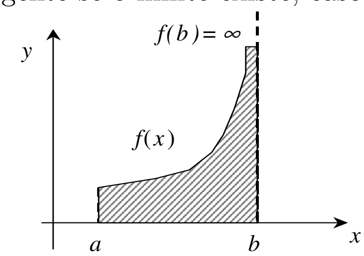
2.3 Integrais impróprios e de limite infinito

2.3.1 Tópicos de Teoria

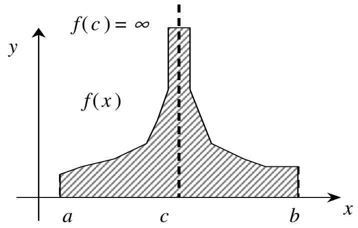
Extensão dos integrais definidos para un interval infinito ou para un interval finito com discontinuidades.



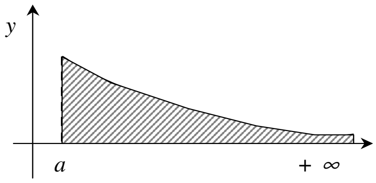
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx$, com $f(a)=\infty$. O integral impróprio diz-se convergente se o limite existe, caso contrário diz-se divergente.



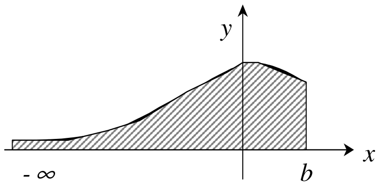
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to b^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx$, com $f(b)=\infty$ para $c\in\,]a,b[$



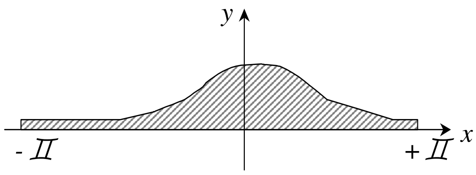
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to c^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to c^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx$ com $f(c)=\infty$



$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_{a}^{\varepsilon} f(x)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_{\varepsilon}^{0} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_{0}^{\varepsilon} f(x)\,dx$$

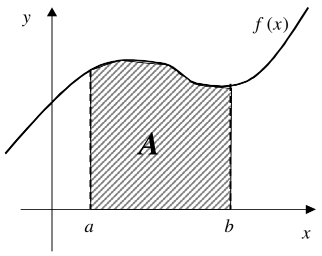
2.3.2 Exercícios propostos

- Calcule os seguintes integrais impróprios de 1^a espécie ou de limite infinito e classifique-os quanto à convergência.

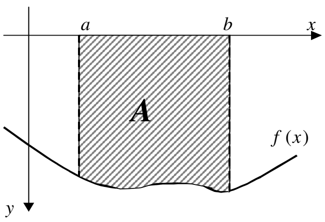
1). $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	2). $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2}dx$	3). $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4). $\int_{-1}^{+1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	5). $\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3}dx$	6). $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$
7). $\int_0^{+\infty} \sin x dx$	8). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx$	9). $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$
10). $\int_{a^2}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$	11). $\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}dx$	12). $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
13). $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$	14). $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}dx$	15). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$
16). $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$	17). $\int_0^{+\infty} x\sin x dx$	18). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

2.4 Integrais a uma variável: aplicações

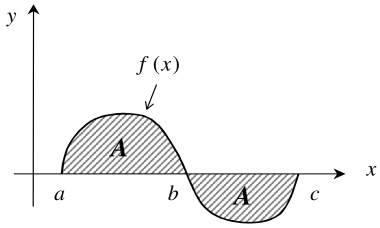
2.4.1 Cálculo de áreas planas



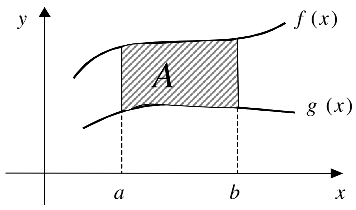
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



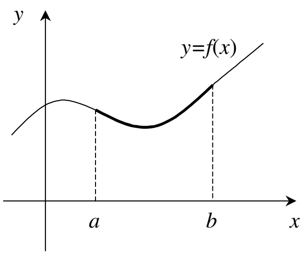
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

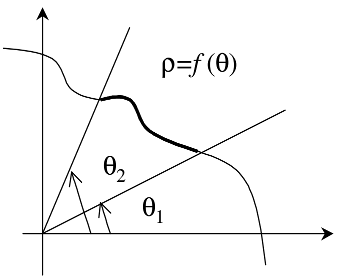
2.4.2 Comprimentos de Linhas

- O cumprimento L do arco de uma curva regular de equação $y = f(x)$ compreendido entre os pontos de abscisas $x = a$ e $x = b$ é dado por:



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

- Se a curva fôr dada por coordenadas polares ρ e θ pela equação $\rho = f(\theta)$, o comprimento L do arco será:



$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

onde θ_1 e θ_2 são os valores do ângulo polar nos pontos extremos do arco.

- Se a curva for definida através de um parâmetro t por $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, $t \in I$, I intervalo real, o comprimento de arco será:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

onde t_1 e t_2 são os valores do parâmetro nos pontos extremos do arco.

2.4.3 Exercícios Propostos

- Calcule as áreas definidas por

1. $0 \leq y \leq 2x, x \leq 4$

2. $0 \leq y \leq \sqrt{x-1}, x \leq 5$

3. $0 \leq y \leq x^2, 2 \leq x \leq 4$

4. $3x \leq y \leq x^2$

5. $0 \leq y \leq \ln x, x \leq e$

6. $0 \leq y \leq e^{2x}, 0 \leq x \leq 1$

7. $y \leq \dfrac{1}{x}, 0 \leq y \leq x, x \leq 4$

8. $\cos x \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi$

9. $y = x^3, y = 8, x = 0$

10. $y = x^2 - 4, y = 4 - x^2$

11. $y^2 = 4x, y^2 = 5x - 4$

12. $y^2 = 4x, x \leq 2$

13. $y = e^{5x}, x = 0, x = 1, y = 0$

14. $y = \ln x, y = \ln(x+2), y = \ln(4-x), y = 0$

15. $x^2 \leq y \leq \dfrac{1}{x}, x \geq 0, y \leq 2$

16. $y \leq 4 - x^2, y \geq 3x^3, y \geq -3x$

17. $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x^2}, x \geq 1$

18. $0 \leq y \leq e^{-x}, x \geq 0$

19. $0 \leq y \leq \dfrac{1}{1+x^2}, x \geq 0$

20. Determine o comprimento do curva de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

21. Determine o comprimento total da curva $\rho = a\sin^3(\theta/3)$ onde θ varia de 0 a 3π.

22. Determine o comprimento total do arco de cicloíde

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = b(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

23. Mostre, por aplicação do cálculo integral, que o comprimento de $1/4$ do arco da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ é $\pi r/2$.

24. Encontra o comprimentos das seguintes curvas:

   (a) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4},\ 2 \le x \le 4$

   (b) $y = \ln(\sin x),\ \pi/6 \le x \le \pi/3$

   (c) $y^2 = 4x,\ 0 \le y \le 2$

   (d) $y = e^x,\ 0 \le x \le 1$

   (e) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x},\ 1/2 \le x \le 1$

2.5 Soluções dos exercícios propostos

2.5.1 Integral definido

1). $19/3$	2). 1	3). $100/3$
4). $1 + 2\ln 2$	5). $2/3$	6). $1 - \cos 1$
7). $\left(3 + e^4\right)/2$	8). $\arctan 3$	9). $2 - \ln(4/9)$
10). $4e^3 - 2e^2$	11). $\pi/2 - 1$	12). 1
13). $(e^\pi + 1)/2$	14). $2/3\left(2\sqrt{2} - 1\right)$	15). $3/2$
16). $1/4$	17). $1/2\ln(8/5)$	18). $\pi/2 - 1$
19). $(e-1)\ln(e-1) + 2 - e$	20). $7 + 2\ln 2$	21). $32/3$
22). $3\pi/16$	23). $98/3$	24). $7/72$
25). $53/3$	26). $1 - 2/e$	27). $3e + 1$
28). $8/15$	29). $\dfrac{2}{9\sqrt{6}} + \dfrac{\pi}{24\sqrt{2}}$	30). $4 - \pi$
31). $\pi/16$	32). $\ln(2/3)^{1/2}$	33). $\ln\dfrac{8}{4+\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1$
34). $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	35). $\ln(4/3)$	36). $1/2 \cdot (\pi/2 - \arcsin(1/4))$
37). $\ln(3/2)$	38). $2(2 - \ln 3)$	39). $\sqrt{3} - \pi/3$
40). $1/2 + \ln(3/4)$	41).	

2.5.2 Integral Indefinido

1). x^2	2). 0	3). $27x^2+45x+21$
4). $-\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+7}2x$	5). $\dfrac{3x^6-4x^2+2}{x}$	6). $5e^{25x^2}$
7). 0	8). $\dfrac{4\left(4x-1\right)^3+1}{\left(4x-1\right)^2-7}$	9). $2x^7$
10). $12x^5-x+5$	11). $2x\sin x^4-4\sin\left(16x^2\right)$	12). 0

2.5.3 Integral impróprio de 1^a e 2^a espécie

1. $l=2$, convergente
2. $l=\infty$, divergente
3. $l=\pi/2$, convergente
4. $l=-6$, convergente
5. $l=\infty$, divergente
6. $l=\pi/2$, convergente
7. Não existe limite, divergente
8. $l=1/3$, convergente
9. $l=2$, convergente
10. $l=\ln\left(a^2/\left(\sqrt{a^4+1}-1\right)\right)$, convergente
11. $l=\infty$, divergente
12. $l=\pi$, convergente
13. $l=8/3$, convergente
14. $l=\infty$, divergente

15. $l = \infty$, divergente

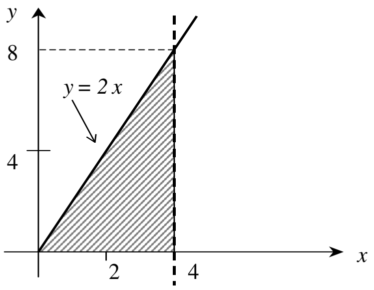
16. $l = 1/2$, convergente

17. O limite não existe, divergente

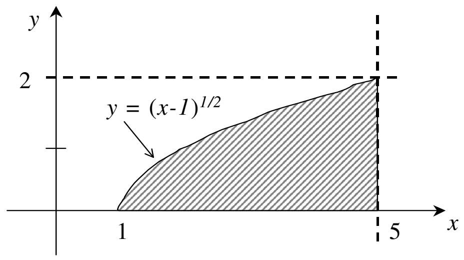
18. $l = \pi/4$, convergente

2.5.4 Aplicações dos Integrais

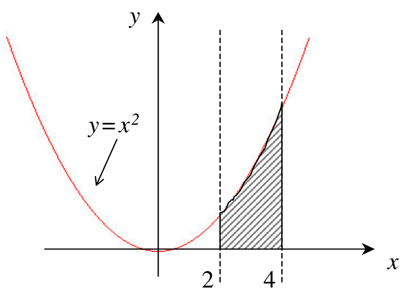
1). $A = 16$



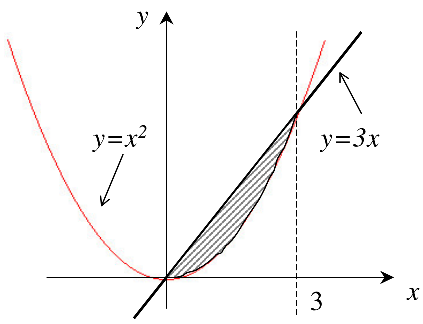
2). $A = \dfrac{16}{3}$



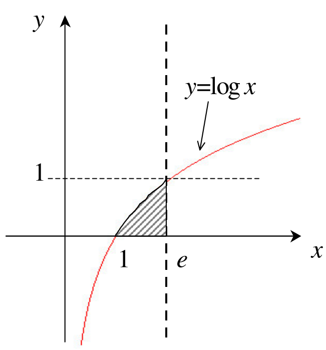
3). $A = \dfrac{56}{3}$



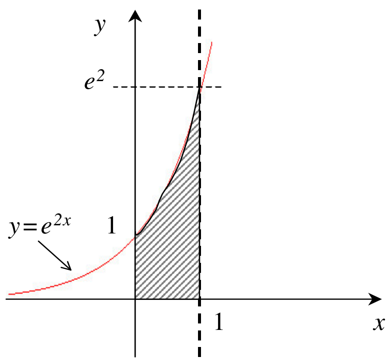
4). $A = \dfrac{1}{2}$



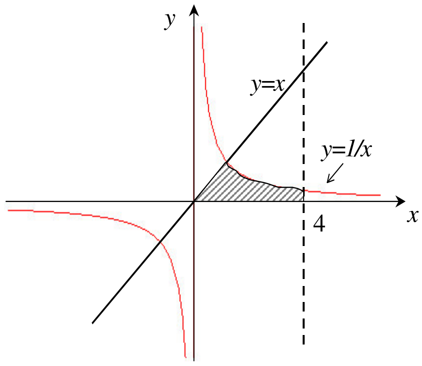
5). $A = 1$



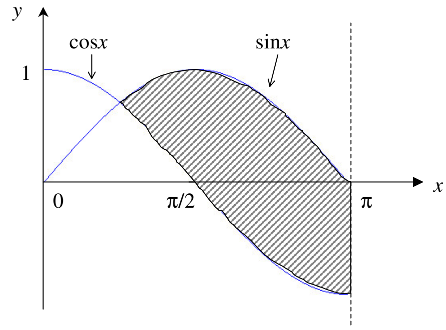
6). $A = \dfrac{e^2 - 1}{2}$



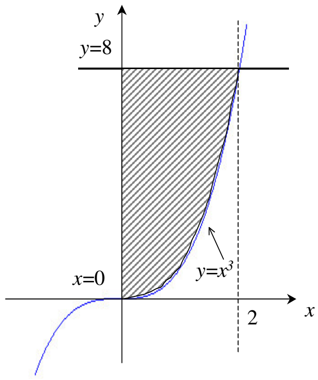
7). $A = \frac{1}{2} + \log 4$



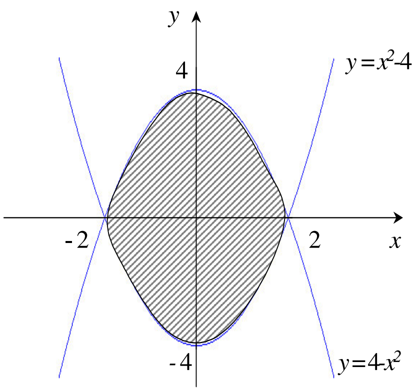
8). $A = 1$



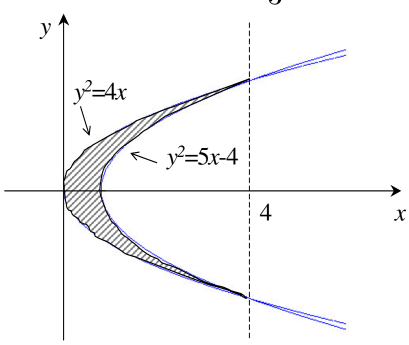
9). $A = 12$



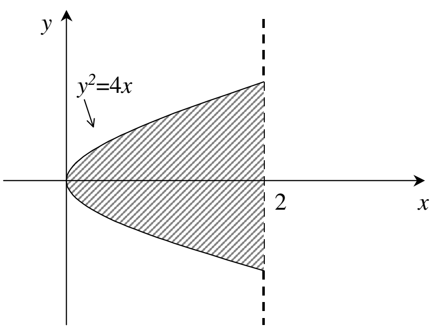
10). $A = \frac{64}{3}$



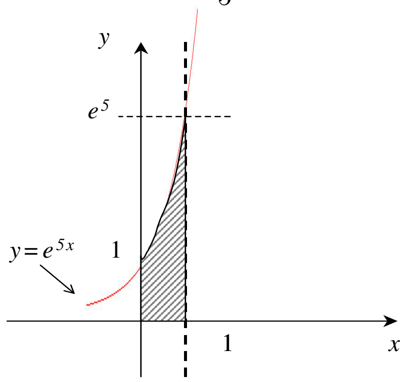
11). $A = \frac{44}{3}$



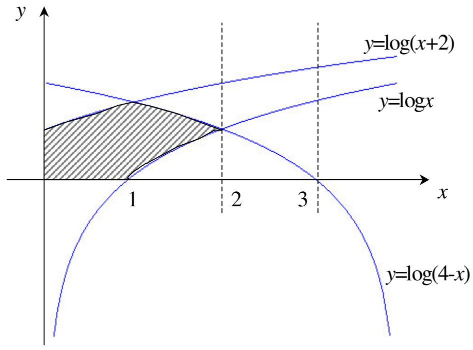
12). $A = \left(16\sqrt{2}\right)/3$



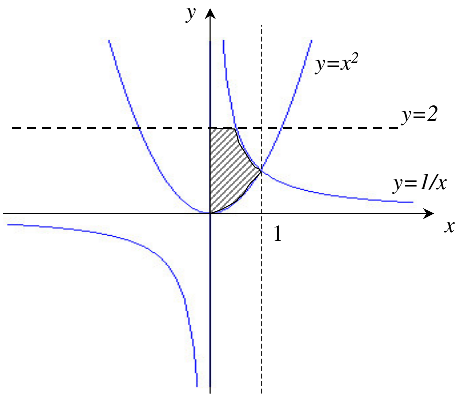
13). $A = \frac{1}{5}\left(e^{5}-1\right)$



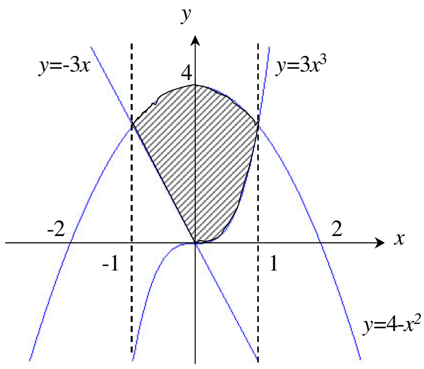
14). $A = 6\log(3/2) - 2$



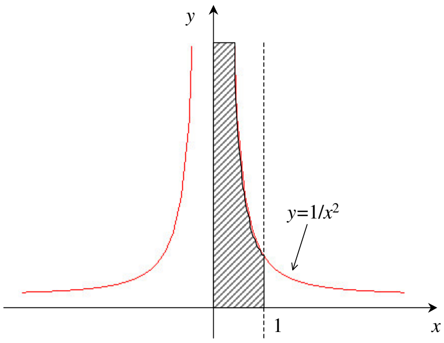
15). $A = 2/3 - \log(1/2)$



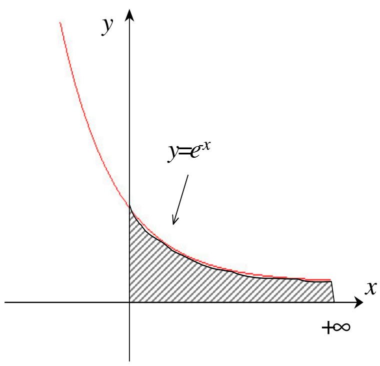
16). $A = 29/6$



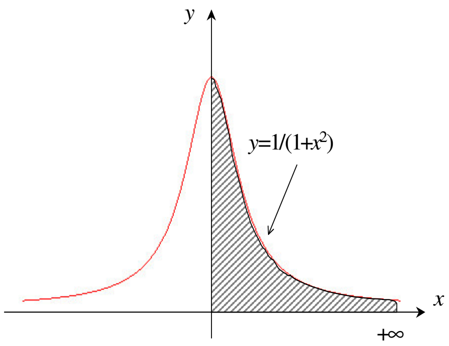
17). $A = 1$



18). $A = 1$



19). $A = \dfrac{\pi}{2}$



20). $L = 6a$.

21). $L = 3\pi/a$.

22). $L = 8a$.