1 Resoluções dos exercícios de SÉRIES propostos no Caderno 1

1. Dado que $\sqrt{n} = n^{1/2}$, a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$$

é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1/2 \leq 1$, logo é divergente.

2. A série numérica

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{3}{1024} + \cdots$$

é uma série geométrica de razão $r = 1/2$. Como $r = 1/2 \in \,]-1, 1[$ então a série numérica é convergente. Dado que o primeiro termo da série é $3/2$, o valor da soma da série é

$$S = \frac{1^o \text{ termo}}{1 - \text{razão}} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

3. Temos

$$\sum_{n\geq 1} 3^{-n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots.$$

Portanto, $\sum_{n\geq 1} 3^{-n}$ é uma série geométrica de razão $r = 1/3$. Dado que $r = 1/3 \in \,]-1, 1[$ então a série numérica é convergente. Atendendo a que o primeiro termo da série é $1/3$, o valor da soma da série é

$$S = \frac{1^o \text{ termo}}{1 - \text{razão}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. A série numérica

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \left[5 \cdot (-3)^{-n}\right] &= \sum_{n\geq 1} \left[5 \cdot \left[(-3)^{-1}\right]^n\right] = \sum_{n\geq 1} \left[5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] \\ &= -\frac{5}{3} + \frac{5}{9} - \frac{5}{27} + \cdots \end{aligned}$$

é convergente, pois é uma série geométrica de razão $r = -1/3$ com $r = -1/3 \in]-1, 1[$. Dado que o primeiro termo da série numérica é $5/3$, o valor da soma da série é

$$S = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

A série numérica

$$\sum_{n \geq 1} [3(-1)^n] = -3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \cdots$$

é uma série geométrica de razão $r = -1$. Dado que $r = -1 \notin]-1, 1[$ então a série é divergente. Também o Critério do Termo Geral (ou Critério Geral de Convergência) permite concluir que a série é divergente. De facto, o termo geral $u_n = 3(-1)^n$ não tem limite (a subsucessão $3,\ 3,\ 3, \ldots, 3(-1)^{2k}, \ldots$ dos termos pares tende para 3 enquanto a subsucessão $-3,\ -3,\ -3, \ldots, 3(-1)^{2k-1}, \ldots$ dos termos ímpares tende para -3;há portanto dois sublimites diferentes) logo $u_n = 3(-1)^n \nrightarrow 0$ (não tende para 0).

A série numérica

$$\sum_{n \geq 1} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + \cdots$$

é uma série geométrica de razão $r = 1$. Como $r = 1 \notin]-1, 1[$ então a série numérica é divergente. Também o Critério do Termo Geral (ou Critério Geral de Convergência) permite concluir que a série é divergente. De facto, o termo geral $u_n = 3$ tem por limite $3 \neq 0$.

5. As séries numéricas

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} 2^n &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots \\ \sum_{n \geq 1} (-2)^n &= -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \cdots \\ \sum_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \cdots \end{aligned}$$

são séries geométricas de razão $r = 2$, $r = -2$ e $r = 1$, respectivamente. Dado que em todas elas a razão $r \notin \,]-1, 1[$, todas estas séries são divergentes.

Podemos mostrar pelo Critério do Termo Geral (ou Critério Geral de Convergência) que todas as séries numéricas

$$\sum_{n\geq 1} 2^n, \quad \sum_{n\geq 1} (-2)^n, \quad \sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{3}\right), \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n,$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n}$$

do exercício são divergentes. De facto, não existem (logo não são nulos) os limites

$$\lim_n (-2)^n \quad \text{e} \quad \lim_n (-1)^n,$$

(o termo geral $u_n = (-2)^n$ não tem limite pois a subsucessão 4, $16, 64, \ldots, (-2)^{2k}, \ldots$ dos termos pares tende para $+\infty$ enquanto a subsucessão -2, -8, $-32, \ldots, (-2)^{2k-1}, \ldots$ dos termos ímpares tende para $-\infty$) (o termo geral $u_n = (-1)^n$ não tem limite pois a subsucessão 1, 1, $1, \ldots, (-1)^{2k}, \ldots$ dos termos pares tende para 1 enquanto a subsucessão -1, -1, $-1, \ldots, (-1)^{2k-1}, \ldots$ dos termos ímpares tende para -1). Para as restantes séries numéricas, temos os seguintes limites **não-nulos**

$$\lim_n 2^n = 2^{+\infty} = +\infty \neq 0,$$

$$\lim_n \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \neq 0,$$

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n} &= \lim_n \left(1 - \frac{3}{n+5}\right)^{2n} \\
&= \lim_n \left[\left(1 + \frac{-3}{n+5}\right)^{n+5}\right]^{\dfrac{2n}{n+5}} = \left(e^{-3}\right)^2 = \frac{1}{e^6} \neq 0,
\end{aligned}$$

(note que $\lim \dfrac{2n}{n+5} = \lim \dfrac{2n}{n} = \lim 2 = 2$) e

$$\lim_n \frac{n+1}{n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1 \neq 0.$$

6. Sabendo que as séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ (geométrica de razão $r = \frac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$) e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ (de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$) são convergentes podemos concluir, pela Proposição 8 (do Caderno 1), que também são convergentes as séries $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2^n} = \sum_{n\geq 1} \left(3 \cdot \frac{1}{2^n}\right)$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2}\right)$. Finalmente, pela Proposição 7 (do Caderno 1), a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{1}{4n^2}\right)$$

é convergente.

7. Podemos determinar a natureza (convergência ou divergência) de todas as séries numéricas deste exercício aplicando o Critério da Comparação - formulação 1 (ou Critério Geral da Comparação). As séries numéricas $\sum_{n\geq 1} v_n$ de termo geral

$$v_n = \frac{n}{n^3+1}, \quad v_n = \frac{1}{n\,(n+1)}, \quad v_n = \frac{3n-1}{n^3} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{1}{2^n+n}$$

são convergentes por serem válidas, para todo o n, as desigualdades

$$0 < \frac{n}{n^3+n} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2},$$
$$0 < \frac{1}{n\,(n+1)} < \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$$
$$0 < \frac{3n-1}{n^3} < \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2},$$

e ser convergente a série de termo geral $u_n = \frac{1}{n^2}$ (é a série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$). Também é válida para todo o n a desigualdade

$$0 \leq \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e é convergente a série de termo geral $u_n = 1/2^n$ (é uma série geométrica de razão $r = 1/2$, um valor entre -1 e 1).

As séries numéricas

$$\sum_{n\geq 2} u_n = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$$

são divergentes atendendo à desigualdade

$$0 \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$$

válida a partir da ordem $n = 2$ (inclusive), e à desigualdade

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,(\cos n)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(válida para todo o n), visto que $-1 \leq \cos n \leq 1$ implica

$$0 < (\cos n)^2 \leq 1$$

(temos $n \neq k\pi/2$). Note que ambas séries usadas na comparação, $\sum\limits_{n\geq 1} v_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (a série harmónica) e $\sum\limits_{n\geq 1} v_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ (série de Dirichlet com $\alpha = 1/2 \leq 1$), são divergentes.

8. Pelo Critério da Comparação - formulação 2, as séries numéricas

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}, \quad \sum_{n\geq 3} u_n = \sum_{n\geq 3} \frac{n-3}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

são divergentes. Para qualquer uma destas séries, usamos a série de comparação $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ com termo geral $v_n = 1/n$ que é divergente (é a série harmónica), pois permite obter os seguintes limites **finitos** e **não-nulos**:

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{2n}{n} = \lim_n 2 = 2 \neq 0,$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\frac{n-3}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{(n-3)\,n}{n^2} = \lim_n \frac{n-3}{n} \\ &= \lim_n \left(1 - \frac{3}{n}\right) = 1 - \frac{3}{+\infty} = 1 - 0 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

(usamos a série de Dirichlet com $\alpha = 1$ porque $grau\left(n^2\right) - grau\,(n-3) = 2 - 1 = 1$) e

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \overset{\text{limite de referência}}{=} 1 \neq 0.$$

Pelo mesmo critério se conclui que são convergentes as séries numéricas $\sum_{n\geq 1} u_n$ de termo geral

$$u_n = \frac{n}{(n^2+1)(n+5)}, \quad u_n = n \sin\frac{1}{n^3+1} \quad \text{e} \quad u_n = \frac{n}{n^2+1} \ln\frac{n+2}{n+5}.$$

O estudo da natureza de todas estas séries exige a comparação (directa ou indirecta) com a série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} 1/n^2$ que é convergente ($\alpha = 2 > 1$). De facto, são **finitos** e **não-nulos** os limites

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\frac{n}{(n^2+1)(n+5)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{(n^2+1)(n+5)} \\ &= \lim_n \frac{n^3}{n^3+5n^2+n+5} = \lim_n \frac{n^3}{n^3} = \lim_n 1 = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

(usamos a série de Dirichlet com $\alpha = 2$ porque $grau\left[\left(n^2+1\right)(n+5)\right] - grau(n) = 3 - 1 = 2$)

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{n \sin\frac{1}{n^3+1}}{n \cdot \frac{1}{n^3+1}} = \lim_n \frac{n \sin\frac{1}{n^3+1}}{n \cdot \frac{1}{n^3+1}} \\ &= \lim_n \frac{\sin\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^3+1}} \overset{\text{limite de referência}}{=} 1 \neq 0 \end{aligned}$$

sendo convergente a série

$$\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} \left(n \cdot \frac{1}{n^3+1}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3+1}.$$

Na verdade, aplicando o Critério da Comparação - formulação 2 a esta série, concluímos que é convergente por ser **finito** e **não-nulo** o limite

$$L = \lim_n \frac{v_n}{w_n} = \lim_n \frac{\dfrac{n}{n^3+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_n \frac{n^3}{n^3} = \lim_n 1 = 1 \neq 0$$

(usamos a série de Dirichlet com $\alpha = 2$ porque $grau\left(n^3+1\right) - grau\,(n) = 3 - 1 = 2$). Temos ainda o limite finito e **não-nulo**

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\dfrac{n}{n^2+1} \ln \dfrac{n+2}{n+5}}{\dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{1}{n+5}} = \lim_n \frac{\dfrac{n}{n^2+1} \ln\left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{n}{n^2+1} \cdot \dfrac{1}{n+5}} \\
&= \lim_n \frac{\ln\left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{1}{n+5}} = \lim_n \frac{-3\ln\left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{-3}{n+5}} \\
&= -3 \lim_n \frac{\ln\left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{-3}{n+5}} \overset{\text{limite de referência}}{=} -3 \cdot 1 = -3
\end{aligned}$$

sabendo, pelo visto acima, que série

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{1}{n+5} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n^2+1)(n+5)}$$

é convergente.

9. (a) Na série de potências

$$\sum_{n \geq 1} u_n(x) = \sum_{n \geq 1} \left(v_n \cdot x^{n-1}\right) = \sum_{n \geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

temos $v_n = 1$. Do limite

$$L = \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \lim_n \left| \frac{1}{1} \right| = \lim_n 1 = 1$$

obtemos o raio de convergência $R = 1/L = 1/1 = 1$. A série de potências é convergente sempre que x toma valores no intervalo aberto $]-1,1[$ e é divergente sempre que $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Para $x=1$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(1) = \sum_{n\geq 1} 1^{n-1} = \sum_{n\geq 1} 1$$

que é divergente pelo Critério do Termo Geral (o seu termo geral tende para $1 \neq 0$). Para $x=-1$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(-1) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}$$

que também é divergente pelo Critério do Termo Geral (o seu termo geral $(-1)^{n-1}$ não tem limite (logo não tende para 0) pois a subsucessão $(-1)^{(2k)-1} = -1$ dos termos de ordem par tende para -1 e a subsucessão $(-1)^{(2k-1)-1} = (-1)^{2k-2} = (-1)^{2k}(-1)^{-2} = 1$ dos termos de ordem ímpar tende para 1). Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D =]-1,1[$.

(b) A série de potências

$$\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

tem x como razão e 1 como primeiro termo. Como tal, para cada $x \in]-1,1[$, é então possivel obter a função soma pontual da série de potências como sendo

$$f(x) = \frac{1^o \text{ termo}}{1- \text{ razão}} = \frac{1}{1-x},$$

e escrever

$$\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

10. Na série de potências de x

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} (v_n \cdot x^n) = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}} \cdot x^n\right],$$

em que $v_n = 1/[3+(-1)^n]^{2n}$, temos L dado por

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}}\right|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}}} \\ &= \overline{\lim_n} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{[3+(-1)^n]^{2n}}} = \overline{\lim_n} \frac{1}{\sqrt[n]{\left[[3+(-1)^n]^2\right]^n}} = \overline{\lim_n} \frac{1}{[3+(-1)^n]^2}. \end{aligned}$$

A sucessão $1/\left[3+(-1)^n\right]^2$ tem por limite inferior

$$\underline{\lim}\frac{1}{\left[3+(-1)^n\right]^2}=\frac{1}{\left[3+1\right]^2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16},$$

correspondente aos termos de ordem par em que $(-1)^{2k}=1$, e por limite superior

$$\overline{\lim}\frac{1}{\left[3+(-1)^n\right]^2}=\frac{1}{\left[3+(-1)\right]^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},$$

correspondente aos termos de ordem ímpar em que $(-1)^{2k-1}=-1$. Conforme a Proposição 17 (do Caderno 1), há que escolher o limite superior. Assim, temos

$$L=\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|v_n|}=\overline{\lim_n}\frac{1}{\left[3+(-1)^n\right]^2}=\frac{1}{\left[3+(-1)\right]^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},$$

donde $R=1/L=1/(1/4)=4$. A série de potências é convergente se $x\in\left]-4,4\right[$. Para $x\in\left]-\infty,-4\right[\cup\left]4,+\infty\right[$ a série de potências é divergente. Para $x=4$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq1}u_n(4)=\sum_{n\geq1}\frac{4^n}{\left[3+(-1)^n\right]^{2n}}$$

que é divergente atendendo a que o seu termo geral não tem limite. Na verdade, a subsucessão dos termos de ordem par

$$\frac{4^{2k}}{\left[3+(-1)^{2k}\right]^{4k}}=\frac{4^{2k}}{\left[3+1\right]^{4k}}=\frac{4^{2k}}{\left[3+1\right]^{4k}}=\frac{4^{2k}}{4^{4k}}=\frac{1}{4^{2k}}$$

tende para 0 mas a subsucessão dos termos de ordem ímpar

$$\frac{4^{2k-1}}{\left[3+(-1)^{2k-1}\right]^{4k-2}}=\frac{4^{2k-1}}{\left[3-1\right]^{4k-2}}=\frac{4^{2k-1}}{2^{4k-2}}=\frac{4^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}}=\frac{\left(2^2\right)^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}}=1$$

tende para 1. Para $x=-4$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq1}u_n(-4)=\sum_{n\geq1}\frac{(-4)^n}{\left[3+(-1)^n\right]^{2n}}=\sum_{n\geq1}(-1)^n\,\frac{4^n}{\left[3+(-1)^n\right]^{2n}}$$

que é divergente porque o seu termo geral não tem limite. Na verdade, a subsucessão dos termos de ordem par

$$(-1)^{2k}\,\frac{4^{2k}}{\left[3+(-1)^{2k}\right]^{4k}}=\frac{4^{2k}}{\left[3+1\right]^{4k}}=\frac{4^{2k}}{\left[3+1\right]^{4k}}=\frac{4^{2k}}{4^{4k}}=\frac{1}{4^{2k}}$$

tende para 0 mas a subsucessão dos termos de ordem ímpar

$$\begin{aligned}
(-1)^{2k-1}\frac{4^{2k-1}}{[3+(-1)^{2k-1}]^{4k-2}} &= -\frac{4^{2k-1}}{[3-1]^{4k-2}} = -\frac{4^{2k-1}}{2^{4k-2}} \\
&= -\frac{4^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}} = -\frac{\left(2^2\right)^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}} = -1
\end{aligned}$$

tende para -1. Finalmente, concluímos que o domínio de convergência da série de potências é $D =]-4,4[$.

Note que para esta série de potências não é possível obter L pelo cálculo de $\lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|$. De facto,

$$\lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{1}{[3+(-1)^{n+1}]^{2(n+1)}}}{\frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}}}\right| = \lim_n \left|\frac{[3+(-1)^n]^{2n}}{[3+(-1)^{n+1}]^{2(n+1)}}\right|$$

não existe, pois os termos de ordem par tendem para $+\infty$, são dados por

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\left[3+(-1)^{2k}\right]^{4k}}{[3+(-1)^{2k+1}]^{2(2k+1)}}\right| &= \left|\frac{(3+1)^{4k}}{(3-1)^{2(2k+1)}}\right| = \left|\frac{4^{4k}}{2^{2(2k+1)}}\right| = \frac{4^{4k}}{\left(2^2\right)^{2k+1}} \\
&= \frac{4^{4k}}{4^{2k+1}} = 4^{4k-2k-1} = 4^{2k-1} \to +\infty,
\end{aligned}$$

mas os termos de ordem ímpar tendem para 0, são dados por

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\left[3+(-1)^{2k-1}\right]^{4k-2}}{[3+(-1)^{2k}]^{4k}}\right| &= \left|\frac{(3-1)^{4k-2}}{(3+1)^{4k}}\right| = \left|\frac{2^{4k-2}}{4^{4k}}\right| = \frac{2^{2(2k-1)}}{4^{4k}} \\
&= \frac{\left(2^2\right)^{2k-1}}{4^{4k}} = \frac{4^{2k-1}}{4^{4k}} = 4^{2k-1-4k} = \frac{1}{4^{2k+1}} \to 0.
\end{aligned}$$

11. (a) A série de potências de x

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} (v_n \cdot x^n) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n!}\cdot x^n\right),$$

em que $v_n = 1/(n!)$, é convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$ porque

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}\right| = \lim_n \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| \\ &= \lim_n \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/0^+ = +\infty$. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$.

(b) Na série de potências de x

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} (v_n \cdot x^n) = \sum_{n\geq 1} (n! \cdot x^n),$$

temos $v_n = n!$. Dado que

$$L = \lim_n \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_n \frac{(n+1)\,n!}{n!} = \lim_n (n+1) = +\infty$$

concluímos que $R = 1/L = 1/+\infty = 0$. Da condição $|x| > R$, que neste caso é $|x| > 0$ (equivalente a $x \neq 0$), concluímos que a série de potências é divergente sempre que $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Para $x = 0$ temos a série numérica nula

$$\sum_{n\geq 1} u_n(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{0^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} 0$$

que é convergente. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \{0\}$.

12. (a) A série de potências de $x - 2$

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x-2) = \sum_{n\geq 1} \left[v_n \cdot (x-2)^{n-1}\right] = \sum_{n\geq 1} \left[n \cdot (x-2)^{n-1}\right]$$

em que $v_n = n$, é convergente sempre que $x - 2$ toma valores no intervalo aberto $]-1, 1[$ porque

$$L = \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim_n \frac{n}{n} = \lim_n 1 = 1,$$

donde $R = 1/L = 1/1 = 1$. Portanto, a série é convergente se $x \in \left]1, 3\right[$, correspondente a

$$-1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3,$$

e é divergente para $x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$. Para $x = 1$ temos a série numérica

$$\sum_{n \geq 1} u_n(1-2) = \sum_{n \geq 1} \left[n \cdot (1-2)^{n-1}\right] = \sum_{n \geq 1} \left[n \cdot (-1)^{n-1}\right]$$

que é divergente (o termo geral não tem limite, logo não tende para 0). Para $x = 3$ temos a série numérica

$$\sum_{n \geq 1} u_n(3-2) = \sum_{n \geq 1} \left[n \cdot (3-2)^{n-1}\right] = \sum_{n \geq 1} \left(n \cdot 1^{n-1}\right) = \sum_{n \geq 1} n$$

que é divergente (o termo geral tende para $+\infty \neq 0$). Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \left]1, 3\right[$.

(b) A série de potências de $x - 2$

$$\sum_{n \geq 1} u_n(x-2) = \sum_{n \geq 1} \left[v_n \cdot (x-2)^{n-1}\right] = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (x-2)^{2n+1}\right]$$

em que $v_n = (-1)^n / \left[(2n+1)!\right]$, é convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$ porque

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)+1]!}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}\right| \\
&= \lim_n \left|\frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot (-1)^n}\right| \\
&= \lim_n \left|\frac{(-1)^n \cdot (-1) \cdot (2n+1)!}{(2n+3) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)! \cdot (-1)^n}\right| \\
&= \lim_n \left|\frac{-1}{(2n+3) \cdot (2n+2)}\right| = \lim_n \frac{|-1|}{|(2n+3) \cdot (2n+2)|} \\
&= \lim_n \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+2)} = \frac{1}{(+\infty) \cdot (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+
\end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/0^+ = +\infty$.

13. (a) Sabendo que

$$\exp x = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right)$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, concluímos (substituindo x por x^2) que

$$\begin{aligned}\exp\left(x^2\right) &= \sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{(n-1)!}\left(x^2\right)^{n-1}\right] = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{(n-1)!}x^{2(n-1)}\right)\\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{2(n-1)} + \cdots\end{aligned}$$

sempre que $x^2 \in \mathbb{R}$, ou seja, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
Em alternativa, podemos obter o desenvolvimento de MacLaurin da função $f(x) = \exp\left(x^2\right)$. Atendendo a que

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x\exp\left(x^2\right) \quad \text{logo} \quad f'(0) = 0\\ f''(x) &= \left(2+4x^2\right)\exp\left(x^2\right) \quad \text{logo} \quad f''(0) = 2\\ f'''(x) &= \left(12x+8x^3\right)\exp\left(x^2\right) \quad \text{logo} \quad f'''(0) = 0\\ f^{(4)}(x) &= \left(12+48x^2+16x^4\right)\exp\left(x^2\right) \quad \text{logo} \quad f^{(4)}(0) = 12\\ &\cdots\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\exp\left(x^2\right) &= 1 + \frac{2}{2!}\cdot x^2 + \frac{12}{4!}\cdot x^4 + \frac{120}{6!}\cdot x^6 + \cdots\cdots\\ &= 1 + 1\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^4 + \frac{1}{6}\cdot x^6 + \cdots\\ &= \frac{1}{0!}\cdot x^0 + \frac{1}{1!}\cdot x^2 + \frac{1}{2!}\cdot x^4 + \frac{1}{3!}\cdot x^6\\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{2(n-1)} + \cdots .\end{aligned}$$

Há que mostrar que o domínio de convergência da série de potências

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}x^{2(n-1)} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{(n-1)!}x^{2n-2}\right)$$

é $D=\mathbb{R}$. De facto, temos

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\dfrac{1}{(n+1-1)!}}{\dfrac{1}{(n-1)!}}\right| = \lim_n \left|\frac{\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{(n-1)!}}\right| \\ &= \lim_n \left|\frac{(n-1)!}{n!}\right| = \lim_n \left|\frac{(n-1)!}{n\,(n-1)!}\right| = \lim_n \left|\frac{1}{n}\right| = \lim_n \frac{1}{n} = 0^+ \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/0^+ = +\infty$.

(b) Hà que obter o desenvolvimento de Taylor da função $f(x)=1/x$ em torno de $x=2$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{logo} \quad f'(2) = -\frac{1}{4} \\ f''(x) &= -(-2)\,x^{-3} = \frac{2}{x^3} \quad \text{logo} \quad f''(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4} \\ f'''(x) &= 2\,(-3)\,x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \quad \text{logo} \quad f'''(2) = -\frac{6}{2^4} = -\frac{3}{8} \\ &\cdots \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(x-2) + \frac{\frac{1}{4}}{2}\cdot(x-2)^2 + \frac{-\frac{3}{8}}{3!}\cdot(x-2)^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot(x-2) + \frac{1}{8}\cdot(x-2)^2 - \frac{1}{16}\cdot(x-2)^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot(x-2) + \frac{1}{8}\cdot(x-2)^2 - \frac{1}{16}\cdot(x-2)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\,(x-2)^{n-1} + \cdots . \end{aligned}$$

Há que mostrar que o domínio de convergência da série de potências de $x-2$

$$\sum_{n\geq 1} \left[(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{n-1}}{2^n}\right] = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot(x-2)^{n-1}\right]$$

em que $v_n = (-1)^{n-1}/2^n$. Temos

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1-1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}}\right| = \lim_n \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}}\right| \\ &= \lim_n \left|\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot(-1)^{n-1}}\right| = \lim_n \left|\frac{(-1)}{2}\right| = \lim_n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/(1/2) = 2$. Portanto, a série é convergente se $x \in]0,4[$ correspondente a

$$-2 < x - 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

(é convergente sempre que $x-2$ toma valores no intervalo aberto $]-2,2[$) e é divergente para $x \in]-\infty,0[\,\cup\,]4,+\infty[$. Para $x = 0$ temos a série numérica

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} u_n(0-2) &= \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1}\frac{(0-2)^{n-1}}{2^n}\right] \\ &= \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1}\frac{(-2)^{n-1}}{2^{n-1}2}\right] \\ &= \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1}\left(\frac{-2}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\right] \\ &= \sum_{n\geq 1}\left[\left[(-1)^{n-1}\right]^2\frac{1}{2}\right] = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2} \end{aligned}$$

que é divergente (o termo geral tende para $1/2 \neq 0$). Para $x = 4$ temos a série numérica

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} u_n(4-2) &= \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1}\frac{(4-2)^{n-1}}{2^n}\right] \\ &= \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}2}\right] = \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

que é divergente (o termo geral não tem limite, logo não tende para 0). Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D =]0,4[$.