1 Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

1.1 Limites e continuidade

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real (escalar) de variável real e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação[1] de D_f.

Definição 1 *O número real L é o* ***limite de f no ponto*** *a, e escreve-se $f(x) \longrightarrow L$ quando $x \longrightarrow a$ ou $L = \lim_{x\to a} f(x)$, se*

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 \quad | \quad \forall x \in D_f \ \wedge \ 0 < |x-a| < \varepsilon \implies |f(x) - L| < \delta$$

(para todo o $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$, dependente do δ tomado, tal que a distância de $f(x)$ a L é inferior a δ sempre que a distância de x a a é inferior a ε, para $x \in D_f \setminus \{a\}$).

A condição $0 < |x-a| < \varepsilon$ significa que $x \in \left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[$ e $x \neq a$. A existência de limite traduz-se intuitivamente por "os valores $f(x)$ e L serão arbitrariamente próximos (ou seja, a distância $|f(x) - L|$ será tão pequena quanto se queira) sempre que nos limitemos a considerar valores de x suficientemente próximos de a (isto é, desde que $|x-a|$ seja suficientemente pequeno)". Contudo, a existência do limite de f no ponto a nada informa[2] acerca do valor da função f no ponto a. O limite de f no ponto a, quando existe, é único.

A definição de limite exige que existam e tenham o mesmo valor os limites da função f restringida a qualquer subconjunto do seu domínio, ou

[1] Considerando definida em $\mathbb{R}$ a distância euclidiana, um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação** de $D \subseteq \mathbb{R}$ se a todo o intervalo aberto centrado em a pertence pelo menos um ponto de D distinto de a, ou seja,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists x \in D \setminus \{a\} \mid x \in \left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[.$$

Na verdade, tal implica que em qualquer vizinhança de a existem infinitos pontos de D, ou seja,

$$\forall\varepsilon > 0, \ \ \left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[\cap D \text{ é um conjunto infinito.}$$

O intervalo $\left]a-\varepsilon, a+\varepsilon\right[$ pode designar-se por bola aberta de centro em a e raio ε. Um ponto que não é de acumulação de D diz-se um **ponto isolado**. O conjunto de todos os pontos de acumulação do conjunto D designa-se por **derivado de** D e denota-se por D'.

[2] Tal valor $f(a)$ pode nem existir e, mesmo no caso em que $a \in D$, podemos ter

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq f(a).$$

seja, que sejam iguais todos os limites relativos da função f. Na recta real, a aproximação a um ponto a faz-se através de uma única direcção. No entanto, podemos considerar nessa direcção a aproximação pela esquerda, $x \to a^-$, ou pela direita, $x \to a^+$, sempre que tal faça sentido face ao domínio da função f. Trata-se de considerar os limites relativos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a \,\wedge\, x<a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a \,\wedge\, x>a} f(x),$$

que se designam por **limites laterais de f no ponto a**. Sendo estes os únicos limites relativos possíveis, é condição necessária para que exista o limite de f no ponto a que eles existam e tenham o mesmo valor,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a} f(x).$$

Como tal, a não-existência de limite no ponto a decorre simplesmente da detecção de valores diferentes nos dois limites laterais,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Quando, face ao domínio da função f, apenas faz sentido uma das aproximações laterais, o valor do limite corresponde a esse limite lateral.

Proposition 2 *Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais de variável real e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f e de D_g. Se existirem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ então também existem nesse ponto a os limites*

P1. *da soma e da diferença das funções*

$$\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

P2. *do produto das funções*

$$\lim_{x\to a} (f \times g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x),$$

P3. *do produto da função por uma constante $c \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to a} (c \times f)(x) = c \times \lim_{x\to a} f(x),$$

P4. *e, sempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, do quociente das funções*

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

A função f **tende para** $+\infty$ quando $x \longrightarrow a$ (escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$) se[3]

$$\forall K > 0 \;\; \exists \varepsilon = \varepsilon(K) > 0 \quad | \quad \forall x \in D_f \;\wedge\; 0 < |x-a| < \varepsilon \implies f(x) > K.$$

A função f **tende para** $-\infty$ quando $x \longrightarrow a$ (escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) se a função $(-f)$ tende para $+\infty$ quando $x \longrightarrow a$.

Seja D_f um subconjunto não majorado de $\mathbb{R}$. O número real L é o **limite de** f quando $x \longrightarrow +\infty$ (escreve-se $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$) se[4]

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists x_0 = x_0(\delta) \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall x \in D_f \;\wedge\; x > x_0 \implies |f(x) - L| < \delta.$$

Se $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ou $L = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ então o gráfico de f tem $y = L$ como **assimptota horizontal.** A função f **tende para** $+\infty$ quando $x \longrightarrow +\infty$ (escreve-se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) se[5]

$$\forall K > 0 \; \exists x_0 = x_0(K) \in \mathbb{R} \;|\; \forall x \in D_f \wedge x > x_0 \implies f(x) > K.$$

São válidas as seguintes operações, no sentido de limite ($L \in \mathbb{R}$),

$$\boxed{(+\infty) + (+\infty) = +\infty}, \qquad \boxed{(+\infty) + L = +\infty}$$

$$\boxed{(-\infty) + (-\infty) = -\infty}, \qquad \boxed{(-\infty) + L = -\infty}$$

$$\boxed{(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty}, \qquad \boxed{(\pm\infty) \cdot (L \text{ positivo}) = \pm\infty}$$

$$\boxed{(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty}, \qquad \boxed{(\pm\infty) \cdot (L \text{ negativo}) = \mp\infty}$$

$$\boxed{\frac{(\pm\infty)}{L \text{ positivo}} = \pm\infty}, \quad \boxed{\frac{L \text{ positivo}}{(\pm\infty)} = 0^{\pm}}, \quad \boxed{\frac{(\pm\infty)}{0^{\pm}} = +\infty}, \quad \boxed{\frac{0^{\pm}}{(\pm\infty)} = 0^{+}}$$

$$\boxed{\frac{(\pm\infty)}{L \text{ negativo}} = \mp\infty}, \quad \boxed{\frac{L \text{ negativo}}{(\pm\infty)} = 0^{\mp}}, \quad \boxed{\frac{(\pm\infty)}{0^{\mp}} = -\infty}, \quad \boxed{\frac{0^{\mp}}{(\pm\infty)} = 0^{-}}$$

---

[3] para todo $K > 0$ existe $\varepsilon > 0$, dependente do K tomado, tal que as imagens $f(x)$ superam o valor de K sempre que a distância de x a a é inferior a ε, para $x \in D_f \setminus \{a\}$.

[4] para todo $\delta > 0$ existe x_0, dependente do δ tomado, tal que a distância de $f(x)$ a L é inferior a δ sempre que x é maior do que x_0, para $x \in D_f$.

[5] para todo $K > 0$ existe x_0, dependente do K tomado, tal que as imagens $f(x)$ superam o valor de K sempre que os objectos x superam o valor de x_0, para $x \in D_f$.

enquanto

$$\boxed{(\pm\infty)-(\pm\infty)=?},\quad \boxed{0\cdot(\pm\infty)=?},\quad \boxed{\frac{0}{0}=?}\quad \text{e}\quad \boxed{\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}=?}$$

são **indeterminações.**

Consideremos que $f(x)>0$ para todo $x\in D_f$. Temos

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{\lim_{x\to a}g(x)}$$

sempre que não ocorra uma das **indeterminações**

$$\boxed{0^0=?},\ \boxed{1^{(\pm\infty)}=?}\ e\ \boxed{(+\infty)^0=?}.$$

No entanto, dada a igualdade

$$f(x)^{g(x)}=\exp\left[g(x)\cdot\ln f(x)\right],$$

(exp denota a exponencial de Neper e ln o logarítmo respectivo) estas indeterminações podem ser resolvidas através da indeterminação $0\cdot(\pm\infty)$.

Limites de referência:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=+\infty\ (a>1,p\in\mathbb{R}),\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0\ (a>1,p\in\mathbb{R}^+)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\exp k$$

Definição 3 *Seja $f:D_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a\in\mathbb{R}$. A função f diz-se* ***contínua no ponto*** *a se e só se são verificadas as três condições seguintes:* ***(i)*** *existe a imagem $f(a)$, ou seja, $a\in D_f$;* ***(ii)*** *existe o limite $\lim_{x\to a}f(x)$;* ***(iii)*** *são iguais os elementos garantidos em* ***(i)*** *e* ***(ii)****, ou seja[6],*

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

A função f diz-se ***contínua*** *se for contínua em todos os pontos do seu domínio.*

[6]Temos então

$$\forall\delta>0\ \ \exists\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0\ \ |\ \ \forall x\in D_f\ \wedge\ 0<|x-a|<\varepsilon\implies|f(x)-f(a)|<\delta.$$

A continuidade de f no ponto a traduz-se intuitivamente por "os valores $f(x)$ e $f(a)$ serão arbitrariamente próximos (isto é, a distância $|f(x) - f(a)|$ será tão pequena quanto se queira) sempre que limitemos a considerar valores de x suficientemente próximos de a (isto é, desde que $|x - a|$ seja suficientemente pequeno)".

1.2 Funções trigonométricas

Sabemos que as funções trigonométricas seno, coseno e tangente são periódicas, não sendo portanto injectivas nos domínios $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$ e $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. No entanto, podemos considerar as restrições principais:

$$\begin{aligned} \text{para } y &= \sin x \text{ apenas } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{para } y &= \cos x \text{ apenas } x \in [0, \pi] \\ \text{para } y &= \tan x \text{ apenas } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

dessas funções, as restrições que permitem garantir a injectividade (cada imagem ser "exclusiva" de um objecto) e manter todos os valores dos respectivos contradomínios. Para estes domínios mais restrictos, existem as funções inversas:

$$\begin{aligned} x &= \arcsin y \text{ (arco-seno de } y) \text{ com } y \in [-1, 1] \\ x &= \arccos y \text{ (arco-coseno de } y) \text{ com } y \in [-1, 1] \\ x &= \arctan y \text{ (arco-tangente de } y) \text{ com } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por exemplo, sabendo que $\cos(\pi/3) = 1/2$, podemos escrever que

$$\frac{\pi}{3} = \arccos(1/2).$$

Trata-se de inverter os papeis das variáveis x e y, não os seus valores. Por outro lado, o valor inverso de $\cos(\pi/3)$, que é 2, é designado por *secante de* $\pi/3$,

$$\sec(\pi/3) = \frac{1}{\cos(\pi/3)} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Sabendo que $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, podemos escrever que $\pi/3 = \arcsin\left(\sqrt{3}/2\right)$ e obter também a *cosecante de* $\pi/3$,

$$\csc(\pi/3) = \frac{1}{\sin(\pi/3)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Sabendo que $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, podemos escrever que $\pi/3 = \arctan\sqrt{3}$ e obter também a *cotangente de* $\pi/3$,

$$\cot(\pi/3) = \frac{1}{\tan(\pi/3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

função trigonom.	**função trigonom. inversa**	**valor inverso**
$y = \sin x$	$x = \arcsin y$	$w = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x$
$y = \cos x$	$x = \arccos y$	$w = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$
$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$x = \arctan y$	$w = \dfrac{1}{\tan x} = \cot x$

Da **fórmula fundamental da trigonometria (f.f.t)**,

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

obtemos (dividindo por $\cos^2 x \neq 0$)

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x},$$

assim como (dividindo por $\sin^2 x \neq 0$)

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Da **fórmula de duplicação de ângulo para o coseno**

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

obtemos (usando $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}},$$

assim como (usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}}.$$

A **fórmula de duplicação de ângulo para o seno** é

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}.$$

1.3 Derivação e Fórmula de Taylor

Derivada de uma função f num ponto a do seu domínio:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f\,(x) - f\,(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$$

O número real $f'(a)$ é o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, cuja equação é

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)\,.$$

A recta normal ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ tem por declive $-\dfrac{1}{f'(a)}$ e a sua equação é

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}\,(x - a)\,.$$

Uma função é crescente nos pontos em que a derivada é positiva e decrescente nos pontos em que a derivada é negativa. Os valores de x nos quais a derivada é nula, designados por pontos críticos, são os "candidatos" a extremos (máximos ou mínimos) relativos da função.

Se a função f define a trajectória de uma partícula em movimento no decurso do tempo, a derivada $f'(a)$ é a velocidade instantânea da partícula no instante de tempo $t = a$.

Regra de derivação da função composta:

$$(f \circ u)'\,(x) = f'\,(u(x)) \cdot u'(x). \tag{1}$$

Regra de derivação da função inversa:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{em que } y = f(x). \tag{2}$$

Consideremos $u = u(x)$ e $v = v(x)$. Em consequência de (1), são válidas as regras operacionais de derivação

$$\boxed{\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{(k \cdot u)' = k \cdot u'} \quad (\text{para } k \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

$$\boxed{(u^p)' = p \cdot u^{p-1} \cdot u'} \quad (\text{para } p \in \mathbb{Q}),$$

a regra de derivação da exponencial (para $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\boxed{(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a} \qquad \text{(em particular } \boxed{(\exp u)' = u' \cdot \exp u}\text{)},$$

e as regras de derivação das funções trigonométricas

$$\boxed{(\sin u)' = u' \cdot \cos u} \qquad \text{e} \qquad \boxed{(\cos u)' = -u' \cdot \sin u}$$

$$\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u} \qquad \text{e} \qquad \boxed{(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot \csc^2 u}.$$

Usando (1) e (2), obtemos as regras de derivação para as funções inversas (para $a > 0$, $a \neq 1$)

$$\boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}} \qquad \text{(em particular, } \boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}\text{)}$$

$$\boxed{(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{(\operatorname{arccot} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}}$$

$$\boxed{(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}.$$

Por exemplo, de $y = \arcsin x$ obtem-se $x = \sin y$ e, por (2),

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, temos

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por (1) concluímos que

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Analogamente, de $y = \arctan x$ obtem-se $x = \tan y$ e, por (2),

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}$$

Como $\dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, temos

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Por (1) concluímos que

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Definição 4 *Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D_f$ um ponto interior a D_f. Se existem com valor real as derivadas de todas as ordens da função f no ponto a define-se o* ***desenvolvimento*** *(ou* ***série****)* ***de Taylor de f no ponto*** *$x = a$ como sendo*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Quando $a = 0$, o desenvolvimento

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(a)}{2} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} \cdot x^3 + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$$

diz-se o ***desenvolvimento*** *(ou* ***série****)* ***de MacLaurin de f.***

Assume-se que $f^{(0)}(a) = f(a)$. O factorial de $n \geq 1$, que é denotado por $n!$, é dado por

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

e, por convenção, o factorial de 0 é 1, $0! = 1$.

O desenvolvimento de Taylor (e de MacLaurin) é válido no domínio de convergências da série de Taylor (e de MacLaurin) que lhe corresponde. A determinação do domínio de convergência é tratado no âmbito das séries de potências.

1.4 Exercícios propostos

1. Represente graficamente as funções:

   (a) $f(x) = -x^2$, $\quad g(x) = x^2 - 3 \quad$ e $\quad h(x) = (x-3)^2$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; g(x) = \sqrt{1+x} \quad \text{e} \quad h(x) = \sqrt{1-x}.$

(c) $f(x) = 1/x, \quad g(x) = 1/x^2 \quad \text{e} \quad h(x) = 1/\sqrt{x}.$

(d) $f(x) = 1/\left(x-2\right), \quad g(x) = 1/x - 2 \quad \text{e} \quad h(x) = 1/\left|x-2\right|.$

(e) $f(x) = \exp x, \quad g(x) = 1/\exp x \quad \text{e} \quad h(x) = \ln x.$

2. Mostre que a parábola de equação $y = x^2 + x + 1$ tem vértice no ponto $\left(-1/2, 3/4\right).$

3. Considere a função
$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$
   (a) Mostre que $f(x) = x^2 + x + 1$ para $x \neq 1$.
   (b) Esboce o gráfico da função f.
   (c) Mostre que
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

4. Considere a função
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$
   (a) Mostre que $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$ para $x \geq -1 \wedge x \neq 0$.
   (b) Esboce o gráfico da função f.
   (c) Mostre que
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

5. Considere a função
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}.$$
   (a) Esboce o gráfico da função f.

(b) Mostre que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

(c) Estude a continuidade da função f.

6. Considere a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

(a) Esboce o gráfico da função f.

(b) Mostre que não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ e que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

(c) Mostre que a função f é contínua.

7. Mostre que não existe o limite

$$\lim_{x \to 5} \frac{x+5}{x-5}.$$

8. Resolva as seguintes indeterminações

(a) $\lim_{x \to -1} (x+1)/f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} 1/f(x)$ em que $f(x) = x^3 + x^2$.

(b) $\lim_{x \to -1} g(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ em que $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

9. Considere a função $f(x) = 1/x$. Resolva as seguintes indeterminações:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \left[x^3 \cdot f(x)\right]$, $\lim_{x \to +\infty} [x \cdot f(x)]$ e $\lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x} \cdot f(x)]$

(b) $\lim_{x \to 0} \left[x^3 \cdot f(x)\right]$, $\lim_{x \to 0} [x \cdot f(x)]$ e $\lim_{x \to 0} [\sqrt{x} \cdot f(x)]$

10. Escreva a expressão da primeira derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = 4x^3 + 3x + \dfrac{1}{x} + 5\sqrt{x}$

(b) $f(x) = 2\left(5 + \exp x^2\right)\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3}\right)$

(c) $f(x) = (2x-3)^4 + \cos x - \ln\left(2x^3\right)$

(d) $f(x) = \cos^3 x - 6\cos\left(x^3\right) - \tan(4x) + 5\sin(3x)$

(e) $f(x) = \dfrac{3x + x^2}{5} + 4 \arcsin(2x) - \cot x^2$

(f) $f(x) = \sec(-3x) + \csc(5x) - 4 \arctan\left(x^3\right)$

11. Considere a função $f(x) = 4x^2 + 2x$.

    (a) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

    (b) Determine a equação da recta normal ao gráfico de f no ponto de ordenada 12 e abcissa positiva.

    (c) Determine as equações das rectas tangente e normal no vértice da parábola de equação $y = f(x)$.

12. Considere $f(x) = (x+3)^2$. Mostre como a forma de escrever f como potências de x, $f(x) = x^2 + 6x + 9$ (caso notável).também resulta do desenvolvimento de MacLaurin da função f.

13. Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das funções

    (a) $y = \exp x$ e $y = \exp(-x)$;

    (b) $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

2 Séries numéricas e séries funcionais

Dada uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais,

$$(u_n) : u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\ u_n,\ u_{n+1},\ \cdots ,$$

(a cada número natural n está associado o termo u_n de ordem n) podemos considerar a adição de todos os seus termos, uma infinidade de parcelas. É o que se pretende com o conceito de série numérica.

Definição 5 *A* ***série numérica*** *de termo geral* u_n*, que se denota por* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *(*$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*,* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *ou simplesmente* $\sum\limits_{n} u_n$*), é a soma infinita dos termos da sucessão real* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \cdots .$$

Embora o termo geral da série seja o termo geral da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é distinta da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que lhe está associada. Enquanto na primeira os termos estão adicionados entre si, na segunda estão "soltos" como sequência ordenada[7].

2.1 Convergência e soma de uma série

Dada uma série numérica $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, pode acontecer que o limite

$$\lim_n (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n)$$

exista como número real (i.e., seja finito). Neste caso a série diz-se **convergente** e o valor S desse limite diz-se a **soma** da série. No caso contrário, se não existe esse limite ou se é $+\infty$ ou $-\infty$, a série numérica diz-se **divergente**. Classificar uma série numérica como convergente ou divergente é identificar a sua **natureza**. Temos a seguinte definição rigorosa.

Definição 6 *Dada uma série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$*, define-se a sua* ***sucessão das somas parciais*** *por* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$*, ou seja,*

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_1, \quad u_1 + u_2, \quad u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots$$

se a sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente com limite* S*,*

$$\lim_n S_n = \lim_n (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n) = S,$$

a série diz-se ***convergente*** *e o valor* S *diz-se a* ***soma da série****; se a sucessão das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for divergente (caso em que tende para* $+\infty$*, tende para* $-\infty$ *ou não tem limite), a série diz-se* ***divergente****.*

Deste modo, a sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determina a natureza da série numérica. Note que a sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de somas parciais é distinta da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que define a série. À primeira corresponde a sequência

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1+u_2, \quad S_3 = u_1+u_2+u_3, \quad \ldots \quad S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n, \quad \ldots$$

[7] Uma série numérica pode estar definida apenas para valores de n a partir de uma certa ordem k. Nesse caso, escreve-se

$$\sum_{n\geq k} u_n = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots .$$

Também se podem considerar séries numéricas com início em $n = 0$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

enquanto à segunda corresponde a sequência

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots\quad u_n,\ldots.$$

A convergência de uma série traduz-se no essencial por: "a soma de todos (portanto, em número infinito) os termos da série acumula/não-excede um determinado valor; esse valor, conforme é intuitivo, é a soma da série". Podemos dizer que a série converge para essa soma.

Existem séries numéricas que têm designações bem especificas dada a estrutura do seu termo geral. A série numérica

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}+\cdots,$$

é designada por **série harmónica**. Relativamente à sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das somas parciais, prova-se que

$$S_{2^n}\geq 1+n\cdot\frac{1}{2}.$$

Temos

$$\lim_n S_{2^n}\geq \lim_n\left(1+n\cdot\frac{1}{2}\right)=1+\left(+\infty\cdot\frac{1}{2}\right)=1+\infty=+\infty,$$

o que mostra que a sucessão das somas parciais, da qual os termos S_{2^n} constituem uma subsucessão, não converge para um valor finito. Concluímos então que a série é divergente. Uma série numérica com a forma geral

$$\sum_{n\geq 1}u_n=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha},$$

para certo $\alpha\in\mathbb{R}$, é designada por **série de Dirichlet**. São convergentes se $\alpha>1$ e divergentes se $\alpha\leq 1$. Note que a série harmónica é um caso particular de série de Dirichlet (com $\alpha=1$).

Uma série numérica que tem como termo geral uma progressão geométrica (significa que cada termo resulta da multiplicação do termo anterior por um valor constante) é designada por **série geométrica.** As séries geométricas têm a forma geral

$$\sum_{n\geq 1}u_n=\sum_{n\geq 1}\left(a\cdot r^{n-1}\right)=a+a\cdot r+a\cdot r^2+a\cdot r^3+\cdots+a\cdot r^{n-1}+a\cdot r^n+\cdots$$

com $a, r \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O número real r é a razão da série numérica e a é o valor do seu primeiro termo. O termo geral da sucessão de somas parciais é dado por

$$S_n = (n+1)\, a$$

quando $r = 1$ (trata-se da série de termo geral constante igual a a), e é dado por

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$$

quando $r \neq 1$. Concluímos então que a série é convergente se $|r| < 1$ (ou seja, se $-1 < r < 1$) com soma S igual a

$$S = \lim_n \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_n r^n\right) = \frac{a}{1-r}$$

(note que se $-1 < r < 1$ então $r^n \to 0$), e é divergente se $|r| \geq 1$ (ou seja, se $r \leq -1 \vee r \geq 1$) (note que se $r = 1$ temos $S_n = (n+1)\,a \to +\infty \cdot a = +\infty$, se $r > 1$ temos $r^n \to +\infty$, e se $r \leq -1$ não existe[8] o limite de r^n). Portanto, se $-1 < r < 1$ podemos escrever

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left(a \cdot r^{n-1}\right) = a + a\cdot r + a \cdot r^2 + a\cdot r^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}.$$

Proposição 7 *Se as séries numéricas* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *e* $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ *são convergentes e têm somas* S *e* S'*, respectivamente, então a série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1}(u_n + v_n)$ *também é convergente e tem soma* $S + S'$.

Proposição 8 *Se a série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *é convergente e tem soma* S *então a série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1}(\alpha \cdot u_n)$*, com* $\alpha \in \mathbb{R}$*, também é convergente e tem soma* $\alpha \cdot S$.

[8] Se $r = -1$ temos

$$\sum_{n\geq 1}\left[a\cdot(-1)^{n-1}\right] = a - a + a - a + a - \cdots$$

mas a sucessão das somas parciais

$$S_n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

não tem limite (note que $a \neq 0$), logo a série é divergente.

Resulta das proposições anteriores que se duas séries numéricas $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ são convergentes e têm somas S e S', respectivamente, então a série numérica $\sum_{n\geq 1}(\alpha \cdot u_n + \beta \cdot v_n)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, também é convergente e tem soma $\alpha \cdot S + \beta \cdot S'$.

Proposição 9 *Se a série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *é convergente e tem soma* S *e a série numérica* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *é convergente e tem soma* S' *então*

$$\sum_{n\geq 1}(u_n * v_n) \leq S * S'.$$

2.2 Alguns critérios de convergência

A determinação de uma expressão analítica do termo geral $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ da sucessão de somas parciais é uma situação pouco frequente. Ao contrário do que sucede com as séries geométricas, para a maioria das séries numéricas $\sum_{n\geq 1} u_n$ não é possível estabelecer uma tal expressão. Tal impede o cálculo do limite de S_n e a obtenção do valor da soma S da série. No entanto, é usual fazer um estudo da série numérica por meios indirectos, através de critérios que permitem identificar a sua natureza.

Proposição 10 ***(Critério geral de convergência, condição necessária de convergência*** *ou* ***critério do termo geral)*** *Se a série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *é convergente então*

$$\lim_n u_n = 0.$$

Em consequência deste resultado (por contra-recíproco), se $\lim_n u_n \neq 0$ então a série numérica $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente,

$$\boxed{\lim_n u_n \neq 0 \implies \sum_{n\geq 1} u_n \text{ série divergente}}.$$

De salientar que para que uma série numérica $\sum_{n\geq 1} u_n$ seja convergente, **NÃO BASTA** (não é suficiente) que o seu termo geral u_n convirja para 0 (como mostra o exemplo da série harmónica $\sum_{n\geq 1}(1/n)$), no entanto, tal é necessário.

Proposição 11 ***(Critério da comparação - formulação 1)*** *Sejam* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *e* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *duas séries numéricas tais que, a partir de certa ordem, se tem* $u_n, v_n \geq 0$ *e* $v_n \leq u_n$. *Então, a convergência da série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *implica a convergência da série* $\sum_{n\geq 1} v_n$,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ série convergente } \implies \sum_{n\geq 1} v_n \text{ série convergente}},$$

e a divergência da série $\sum_{n\geq 1} v_n$ *implica a divergência da série* $\sum_{n\geq 1} u_n$,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ série divergente } \implies \sum_{n\geq 1} u_n \text{ série divergente}}.$$

Proposição 12 ***(Critério da comparação - formulação 2)*** *Sejam* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *e* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *duas séries numéricas tais que* $u_n \geq 0$ *e* $v_n > 0$ *para todo o* n. *Se existe o limite*

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$$

e tem valor finito não-nulo (portanto $L \neq 0$ *e* $L \neq +\infty$, *ou ainda,* $0 < L < +\infty$*) então as duas séries têm a mesma natureza.*

É frequente o uso de uma série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ como série $\sum_{n\geq 1} v_n$. O valor conveniente para $\alpha \in \mathbb{Q}$ é escolhido com base no termo geral u_n da série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de que se quer identificar a natureza. Também as séries geométricas são usadas com frequência para comparação.

Proposição 13 ***(Critério da raíz de Cauchy)*** *Dada uma série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *tal que* $u_n \geq 0$ *para todo o* n, *suponha que o limite*

$$L = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$$

é finito ou $+\infty$. *Então a série é convergente se* $L < 1$ *e é divergente se* $L > 1$ *ou* $L = 1^+$ *(*$L = 1^+$ *significa* $L = 1$ *e* $\sqrt[n]{u_n} > 1$*). Quando* $L = 1^-$ *(que significa* $L = 1$ *e* $\sqrt[n]{u_n} < 1$*) ou* $L = 1^\pm$ *(que significa* $L = 1$ *mas* $\sqrt[n]{u_n} > 1$ *para alguns valores de* n *e* $\sqrt[n]{u_n} < 1$ *para outros valores de* n *intercalados com os anteriores) nada se pode concluir sobre a natureza da série.*

Proposição 14 ***(Critério da razão de D' Alemberg)*** *Dada uma série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *tal que* $u_n > 0$*, para todo o* n*, suponha que o limite*

$$L = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

é finito ou $+\infty$*. Então série é convergente se* $L < 1$ *e é divergente se* $L > 1$ *ou* $L = 1^+$ *(*$L = 1^+$ *significa* $L = 1$ *e* $u_{n+1}/u_n > 1$*). Quando* $L = 1^-$ *(que significa* $L = 1$ *e* $u_{n+1}/u_n < 1$*) ou* $L = 1^\pm$ *(que significa* $L = 1$ *mas* $u_{n+1}/u_n > 1$ *para alguns valores de* n *e* $u_{n+1}/u_n < 1$ *para outros valores de* n *intercalados com os anteriores) nada se pode concluir sobre a natureza da série.*

2.3 Séries de potências

Quando o termo geral de uma série não depende só de n mas também de uma variável x, a série diz-se uma **série funcional** (ou **série de funções**). Consideremos o seguinte caso de série funcional, que é particularmente importante por constituir uma generalização da noção de polinómio.

Definição 15 *Chama-se* ***série de potências*** *de* x *a toda a série da forma*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \left(v_n \cdot x^{n-1}\right) = v_1 + v_2 \cdot x + v_3 \cdot x^2 + v_4 \cdot x^3 + \cdots .$$

Para cada valor de x fixo, a série de potências $\sum\limits_{n\geq 1} \left(a_n \cdot x^{n-1}\right)$ dá lugar a uma série numérica. Em geral, existem valores de x que conduzem a séries numéricas convergentes e valores de x que conduzem a séries numéricas divergentes. Como exemplo, consideremos a série de potências de x

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

em que $v_n = 1$ para todo o n. Para $x = 2$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(2) = \sum_{n\geq 1} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

que é divergente, enquanto para $x = 1/2$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

que é convergente.

Definição 16 *O conjunto de valores de x para os quais a série de potências $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(v_n \cdot x^{n-1}\right)$ é convergente diz-se o* ***domínio de convergência pontual*** *(ou apenas* ***domínio de convergência****) da série. Quando o domínio de convergência é um intervalo, a metade do comprimento desse intervalo diz-se o* ***raio de convergência da série.***

Em consequência dos critérios da raíz de Cauchy e da razão de D' Alemberg, é válido o seguinte resultado para determinação do domínio de convergência.

Proposição 17 *A cada série de potências de x, $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \left(v_n \cdot x^{n-1}\right)$, está associado um "número" $R \geq 0$ ou $R = +\infty$ tal que se $x \in \left]-R, R\right[$ (ou seja, $|x| < R$) então a série numérica correspondente é convergente e se $x \in \left]-\infty, -R\right[\cup \left]R, +\infty\right[$ (ou seja, $|x| > R$) a série numérica correspondente é divergente. O valor de R é dado por*

$$\boxed{R = \frac{1}{L}}$$

em que L é o valor do limite superior

$$L = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|}.$$

Quando existe, o limite $\lim_n |v_{n+1}/v_n|$ tem o mesmo valor que $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}$. Neste caso, também

$$L = \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|.$$

Este resultado não permite concluir a natureza da série de potências para $x = R$ e $x = -R$ (ou seja, $|x| = R$). Para estes valores de x é necessário um estudo particular, ou seja, substituir na série de potências a variável x por R e por $-R$ e estudar as séries numéricas

$$\sum_{n\geq 1} u_n(R) = \sum_{n\geq 1} \left(v_n \cdot R^{n-1}\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} u_n(-R) = \sum_{n\geq 1} \left[v_n \cdot (-R)^{n-1}\right].$$

Após o estudo destas séries numéricas, os valores R e $-R$ são ou não incluídos no domínio de convergência.

Se $R = 0$ (caso em que são $+\infty$ os limites $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}$ e $\lim_n |v_{n+1}/v_n|$) então o domínio de convergência da série de potências é $D = \{0\}$. Se

$R = +\infty$ (caso em que são nulos os limites $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}$ e $\lim_n |v_{n+1}/v_n|$) então o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$.

Considere o caso, mais geral, de séries de potências de $x - a$.

Definição 18 *Chama-se* ***série de potências*** *de $x - a$ a toda a série da forma*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x-a) = \sum_{n\geq 1} \left[v_n \cdot (x-a)^{n-1} \right].$$

Proposição 19 *A série de potências $\sum_{n\geq 1} \left[v_n \cdot (x-a)^{n-1} \right]$ é absolutamente convergente para os valores de x que verifiquem $x \in \left]a - R, a + R\right[$ (ou seja, $|x - a| < R$) e divergente para $x \in \left]-\infty, a - R\right[\cup \left]a + R, +\infty\right[$ (ou seja, $|x - a| > R$) em que R é dado por*

$$R = \frac{1}{L}$$

com

$$L = \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| \quad \text{ou} \quad L = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|}.$$

Se $|x - a| > R$ então a série de potências é divergente.

Para $x = a - R$ e $x = a + R$ (ou seja, $|x - a| = R$) é necessário um estudo particular.

O desenvolvimento de Taylor é uma série de potências de $x - a$ e o desenvolvimento de MacLaurin é uma série de potências de x.

2.4 Exercícios propostos

1. Justifique que a série numérica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

2. Mostre que a série numérica $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2^n}$ é convergente e tem soma 3.

3. Estude a natureza da série numérica $\sum_{n\geq 1} 3^{-n}$. Caso seja convergente, determine a sua soma.

4. Proceda como no exercício anterior relativamente às séries numéricas $\sum_{n\geq 1} 5\,(-3)^{-n}$, $\sum_{n\geq 1} 3\,(-1)^n$ e $\sum_{n\geq 1} 3$.

5. Mostre que são divergentes as séries numéricas

$$\sum_{n\geq 1} 2^n, \ \sum_{n\geq 1} (-2)^n, \ \sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{3}\right), \ \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n}.$$

6. Mostre que a série numérica $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{1}{4n^2}\right)$ é convergente.

7. Por comparação, mostre que as séries numéricas $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ de termo geral

$$v_n = \frac{n}{n^3+1}, \ v_n = \frac{1}{n\,(n+1)}, \ v_n = \frac{3n-1}{n^3} \ \text{ e } \ v_n = \frac{1}{2^n+n}$$

são convergentes enquanto que as séries numéricas $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ de termo geral

$$v_n = \frac{1}{n-1} \ (\text{para } n \geq 2) \ \text{ e } \ v_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$$

são divergentes.

8. Usando um critério da comparação, mostre que as séries numéricas $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ de termo geral

$$u_n = \frac{2}{n}, \quad u_n = \frac{n-3}{n^2} \quad \text{e} \quad u_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

são divergentes enquanto que são convergentes as séries numéricas $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ de termo geral

$$u_n = \frac{n}{(n^2+1)\,(n+5)}, \quad u_n = n\sin\frac{1}{n^3+1} \quad \text{e} \quad u_n = \frac{n}{n^2+1}\ln\frac{n+2}{n+5}.$$

9. Considere a série de potências

$$\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

(a) Mostre que o domínio de convergência da série de potências é o intervalo $]-1,1[$.

(b) Dado que, para cada $x \in \,]-1, 1[$, a série de potências de x dá lugar a uma série geométrica, mostre que

$$\sum_{n \geq 1} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

10. Mostre que série de potências de x

$$\sum_{n \geq 1} u_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{[3 + (-1)^n]^{2n}},$$

tem o intervalo $]-4, 4[$ como domínio de convergência.

11. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências de x :

(a) $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x) = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{n!}$.

(b) $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x) = \sum\limits_{n \geq 1} n! x^n$.

12. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências de $x - 2$:

(a) $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x-2) = \sum\limits_{n \geq 1} n(x-2)^{n-1}$.

(b) $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x-2) = \sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n \dfrac{(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

13. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais os seguintes desenvolvimentos em série de potências convergem para as respectivas funções:

(a) $1 + x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{6}x^6 + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{n!} + \cdots = \exp(x^2)$

(b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{8}(x-2)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{n-1}}{2^n} + \cdots = \dfrac{1}{x}$