ANÁLISE MATEMÁTICA II

Caderno de Exercícios

CÁLCULO DIFERENCIAL em $\mathbb{R}^n$

ANO LECTIVO: 2010/2011

CURSOS: ETI, ETI-PL e EI

Elaborado pelas docentes: DIANA MENDES
ROSÁRIO LAUREANO

DMQ – Dpto de Métodos Quantitativos

1 Domínios de Definição

- Uma **função real** (ou **escalar**) **de** n **variáveis reais**, com $n \geq 1$, é uma função f cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} f & : & D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \in & D_f \mapsto y = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida por uma expressão com n variáveis. A designação "função real" indica que o contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ então o gráfico de f é

$$Gr(f) = \left\{(x_1, x_2, y) \in D_f \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid y = f(x_1, x_2)\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

e pode ser pensado como uma superfície no espaço.

Exemplo 1 *A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

de domínio $D_f = \mathbb{R}^2$, tem como gráfico um parabolóide de vértice $(0, 0, 0)$. As funções $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x, y) = 5 + x^2 + y^2 \quad e \quad h(x, y) = (x - 3)^2 + y^2,$$

respectivamente, têm o mesmo domínio, $D_{g,h} = \mathbb{R}^2$. No entanto, o gráfico de g é um parabolóide de vértice $(0, 0, 5)$ e o gráfico de h é um parabolóide de vértice $(3, 0, 0)$. Os gráficos de g e de h correspondem a translações do gráfico de f (translação segundo o vector $\overrightarrow{v} = (0, 0, 5)$ no caso de g e translação segundo o vector $\overrightarrow{v} = (3, 0, 00)$ no caso de h).

- Uma **função vectorial** (ou **campo de vectores**) **de** n **variáveis reais** é uma função $\mathbf{f}$ cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e cujo contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ com $m \geq 2$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f} & : & D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ com } m \geq 2 \\ (x_1, \ldots, x_n) & \in & D_{\mathbf{f}} \mapsto (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

em que $(y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$. Uma função $D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é definida por um sistema de m funções

$f_1, \ldots, f_m$ reais de n variáveis reais, designadas por **funções componentes** da função $\mathbf{f}$. O domínio $D_{\mathbf{f}}$ corresponde à intersecção dos domínios das funções componentes $f_1, \ldots, f_m$, ou seja,

$$D_{\mathbf{f}} = D_{f_1} \cap \cdots \cap D_{f_m}.$$

Se $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ então o gráfico de $\mathbf{f}$ é

$$Gr(\mathbf{f}) = \left\{(x, y_1, y_2) \in D_{\mathbf{f}} \times \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid y_1 = f_1(x) \wedge y_2 = f_2(x)\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

e pode ser pensado como uma curva no espaço.

- Dada um função real $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou uma função vectorial $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, podem constituir o seu domínio todos os elementos de $\mathbb{R}^n$ para os quais é possível efectuar todas as operações indicadas na(s) expressão(ões) que definem a função. Para tal, há que ter em conta as condições seguintes:

$$\text{para } \frac{u}{v} \text{ exigimos } v \neq 0$$

$$\text{para } \sqrt[n]{u} \text{ (com } n \text{ par) exigimos } u \geq 0$$

$$\text{para } u^v \text{ exigimos } u > 0$$

$$\text{para } \log_a u \text{ exigimos } u > 0$$

$$\text{para } \tan u \text{ exigimos } u \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{para } \cot u \text{ exigimos } u \neq \pm\pi + 2k\pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{para } \arcsin u \text{ ou } \arccos u \text{ exigimos } -1 \leq u \leq 1.$$

Exemplo 2 *Por exemplo,* $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$\mathbf{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) = \left(x^2 + y^2, \frac{x}{y}, \frac{1}{y+2}\right)$$

tem por funções componentes $f_1(x, y) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y) = x/y$ *e* $f_3(x, y) = 1/(y+2)$. *Neste exemplo tem-se* $D_{\mathbf{f}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} \subset \mathbb{R}^2$ *que corresponde à intersecção*

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{f}} &= D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} \\ &= \mathbb{R}^2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2\}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}. \end{aligned}$$

1.1 Exercícios Propostos

1. Dadas as seguintes funções $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, determine e represente graficamente o domínio de definição D_f para cada uma:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{3x}{3x + y - 2}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

   (c) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^3$

   (d) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^{3x}$

   (e) $f(x,y) = \ln(x + y)$

   (f) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4 - (x+1)^2 - y^2}}{\sqrt[4]{y - x^2}}$

   (g) $f(x,y) = \ln(1 - x + y)$, com $x, y \geq 0$

   (h) $f(x,y) = \dfrac{\ln(4 - x - y)}{\sqrt[4]{xy - 3}}$

   (i) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$

   (j) $f(x,y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$

   (k) $f(x,y) = \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{x^2 - 4}$

   (l) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

   (m) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   (n) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

   (o) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}$

(p) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$

(q) $f(x,y) = \ln\left(1-x^2\right) + \cos(xy)$

(r) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x^2-y}}$

(s) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$

(t) $f(x,y) = \left(4-x^2-y^2\right)^{xy}$

2. Determine o domínio de definição D de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x+y)} & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } x+y>0 \\ \sqrt{1-x-y} & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } x+y \leq 0 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2<1 \text{ e } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \ln\left(y-x^2\right) & \text{se } \sqrt{x^2+y^2} \geq 2 \\ \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } \sqrt{x^2+y^2} < 2 \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+3y^4}{2x^3-y^3} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \ln(3x+y) & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } 3x+y>0 \\ \dfrac{1}{x+y} & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } 3x+y \leq 0 \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3y^2-x} & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } x \neq 3y \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } x = 3y \end{cases}$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{2y-1} & \text{se} \quad y \neq 1 \\ \\ 1 & \text{se} \quad y = 1 \end{cases}$

(h) $f(x,y) = \begin{cases} xy \exp \dfrac{x-y}{x+y} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Considere a função vectorial $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) \equiv \begin{cases} f_1(x,y) = y + \sqrt{x - x^2} \\ \\ f_2(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy-1}} \end{cases} .$$

Determine o domínio de definição de $\mathbf{f}$ e represente-o graficamente.

4. Considere a função

$$f(x,y) = \ln(xy-1) + \sqrt{9 - (x-1)^2 - y^2}.$$

Determine o domínio de definição da função f e represente-o graficamente.

5. Para o conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1 \ \wedge \ y - x \leq 1 \ \wedge \ y \geq 0\right\}$, considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2+1} & \text{se} \quad (x,y) \in A \\ \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) \notin A \end{cases} .$$

Determine o domínio de definição da função f.

6. Determine o domínio de definição D_f de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 \sin^2(y) + y^3 \cos^2(x)}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2}{3x+y} & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } y \neq x \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } y = x \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 - y^2} & \text{se} \quad x \neq \pm y \\ 0 & \text{se} \quad x = \pm y \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 4y^2}{x^2 - 5y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2 Limites e Continuidade

- Considere em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$, a **distância euclidiana** definida por

$$d\left[(x_1, \ldots, x_n), (a_1, \ldots, a_n)\right]_{\mathbb{R}^n} = \|(x_1, \ldots, x_n) - (a_1, \ldots, a_n)\|,$$

ou seja,

$$d\left[(x_1, \ldots, x_n), (a_1, \ldots, a_n)\right]_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} \in \mathbb{R}_0^+.$$

Em $\mathbb{R}$ ($n = 1$) esta distância pode traduzir-se pelo módulo da diferença entre os pontos,

$$d(x,a)_{\mathbb{R}} = \sqrt{(x-a)^2} = |x - a|.$$

- Dado um ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ e um número real positivo ε, a **bola aberta** de centro em $(a_1, \ldots, a_n)$ e raio ε, que se denota por $B_\varepsilon(a_1, \ldots, a_n)$ ou $B((a_1, \ldots, a_n), \varepsilon)$, é o conjunto de todos os pontos $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ é inferior a ε, ou seja,

$$B_\varepsilon(a_1, \ldots, a_n) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid d\left[(x_1, \ldots, x_n), (a_1, \ldots, a_n)\right]_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon\right\}.$$

Para $n=1$ a bola aberta é o segmento de recta $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, enquanto para $n=2$ é o interior do círculo de centro (a_1,a_2) e raio ε, pois obtemos

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2<\varepsilon^2.$$

Para $n=3$ a bola aberta é o interior da esfera de centro (a_1,a_2,a_3) e raio ε, pois

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2<\varepsilon^2.$$

- Seja $D\subseteq\mathbb{R}^n$. Um ponto $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ é um **ponto de acumulação** de D se em qualquer bola aberta $B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n)$ de centro $(a_1,\ldots,a_n)$ existe pelo menos um ponto de D distinto de $(a_1,\ldots,a_n)$, ou seja, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,(x_1,\ldots,x_n)\in D\setminus\{(a_1,\ldots,a_n)\}$ tal que

  $$(x_1,\ldots,x_n)\in B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n).$$

  O conjunto de todos os pontos de acumulação do conjunto D designa-se por **derivado de** D e denota-se por D'. Um ponto que não é de acumulação de D diz-se um **ponto isolado**.

  Assim, um ponto $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ é de acumulação do conjunto D se em qualquer sua "vizinhança" existe pelo menos um outro ponto (diferente dele) que pertence a D. Na verdade, tal implica que em qualquer vizinhança de $(a_1,\ldots,a_n)$ existem infinitos pontos de D, ou seja,

  $$\forall\varepsilon>0,\ B_\varepsilon(a_1,\ldots,a_n)\cap D \text{ é um conjunto infinito.}$$

- Sejam $f:D_f\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e (a,b) um ponto de acumulação de D_f. Diz-se que $l\in\mathbb{R}$ é o **limite** de f no ponto (a,b) se e só se para todo $\delta>0$ existe um $\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0$ (dependente do δ tomado) tal que $d(f(x,y),l)<\delta$ sempre que $d((x,y),(a,b))<\varepsilon$ e $(x,y)\in D_f\setminus\{(a,b)\}$, ou seja, $\forall\delta>0$, $\exists\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0$ tal que

  $$d((x,y),(a,b))_{\mathbb{R}^2}<\varepsilon \wedge\ (x,y)\in D_f\backslash\{(a,b)\} \implies d(f(x,y),l)_{\mathbb{R}}<\delta.$$

  Considerando a distância euclidiana, tem-se $l=\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$ se e só se $\forall\delta>0$, $\exists\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0$ tal que

  $$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\varepsilon\wedge\ (x,y)\in D_f\backslash\{(a,b)\} \implies |f(x,y)-l|<\delta.$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a,b) um ponto de acumulação de D_f. A aproximação a um ponto (a,b) pode fazer-se através de qualquer uma das infinitas direcções do plano. Como tal, quando ocorrem indeterminações há que considerar os **limites direccionais** e os **limites sucessivos** (ou **iterados**) que são casos particulares de limites relativos. Tem-se:

  - *Limites sucessivos* (ou *iterados*):

    $$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] \quad \text{e} \quad \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right],$$

    cada um constituído por dois limites sucessivos numa só variável;

  - *Limites direccionais*:

    * se o caminho é uma recta não-vertical de declive m que passa no ponto (a,b), então o limite direccional é

      $$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=m(x-a)+b}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x, m(x-a)+b),$$

      um limite numa só variável (x);

    * se o caminho é uma parábola de eixo vertical que tem o ponto (a,b) como vértice, então o limite direccional é

      $$, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=k(x-a)^2+b}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f\left(x, k(x-a)^2+b\right)$$

      um limite numa só variável (x);

    * se o caminho é uma parábola de eixo horiontal que tem o ponto (a,b) como vértice, então o limite direccional é

      $$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ x=k(y-a)^2+b}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f\left(k(y-a)^2+b, y\right),$$

      um limite numa só variável (y).

    * se o caminho é qualquer outra curva que passe no ponto (a,b) tem-se outro limite direccional.

O cálculo destes limites, que são em número infinito, indicam acerca de um possível "candidato" a limite l (se todos são iguais) ou permitem concluir a inexistência de limite no ponto (a,b) (se existem pelo menos dois com valores diferentes).

A definição de limite exige que existam e tenham o mesmo valor todos os limites da função f restringida a qualquer um desses caminhos possíveis. Como é impossível calcular todos esses limites relativos, só o uso da definição permite concluir a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x,y\right).$$

Para tal, são fundamentais as desigualdades com módulos

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\boxed{|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\boxed{|x \pm y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\boxed{\left|x^3 - y^3\right| \leq \left(x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

e as igualdades com módulos

$$\boxed{|x \times y| = |x| \times |y|}$$
$$\boxed{\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ para } y \neq 0}.$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação dos domínios D_f e D_g. Se existirem os limites $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x,y\right)$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g\left(x,y\right)$ então:
  - limite da soma e da diferença de funções

    $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f \pm g\right)\left(x,y\right) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x,y\right) \pm \lim_{(x,y)\to(a,b)} g\left(x,y\right);$$
  - limite do produto de funções

    $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f \times g\right)\left(x,y\right) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x,y\right) \times \lim_{(x,y)\to(a,b)} g\left(x,y\right);$$

- limite do produto de uma função por uma constante $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (k \cdot f)(x,y) = k \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y);$$

- limite do quociente de funções

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f}{g}(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$$

  sempre que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$ e $g(x,y) \neq 0$ para todo o $(x,y) \in D_g$.

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de D_f. A função f diz-se **contínua no ponto** (a,b) se e só se são verificadas as três condições seguintes:

  - existe a imagem $f(a,b)$, ou seja, $(a,b) \in D_f$;
  - existe o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$;
  - são iguais os elementos garantidos em **i.** e **ii.**, isto é,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

  A função diz-se **contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

  A continuidade de f no ponto (a,b) traduz-se no essencial por: "sempre que se tomam objectos (x,y) suficientemente próximos de (a,b) obtêm-se valores $f(x,y)$ das imagens tão próximos de $f(a,b)$ quanto se queira".

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de D_f. A função f diz-se **prolongável por continuidade no ponto** (a,b) (ou que f tem no ponto (a,b) uma descontinuidade removível) se e só se são verificadas as duas condições seguintes:

  - $(a,b) \notin D_f$ (logo não existe a imagem $f(a,b)$);
  - existe com valor finito (como número real) o limite

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).$$

  Seja l o valor deste limite.

Define-se a função f^*, designada por **prolongamento por continuidade de f ao ponto** (a,b), por

$$\boxed{f^*(x,y) \equiv \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D_f \\ \\ l & \text{se } (x,y) = (a,b) \end{cases}}$$

com domínio $D_{f^*} = D_f \cup \{(a,b)\}$. Note-se que $D_{f^*} \neq D_f$, pois $D_{f^*} = D_f \cup \{(a,b)\}$ e $(a,b) \notin D_f$.

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a,b) um ponto de acumulação de D_f. A função f diz-se **descontínua no ponto** (a,b) se f não é contínua nem prolongável por continuidade nesse ponto. Neste caso, o ponto (a,b) diz-se um **ponto de descontinuidade** da função f.

- Qualquer função polinomial é uma função contínua, independentemente do número de variáveis. Tais funções podem ser designadas por funções elementares.

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D_f \cap D_g$. Se f e g são contínuas no ponto (a,b) então são contínuas nesse ponto as funções $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $k \cdot f$ (para $c \in \mathbb{R}$) e $\dfrac{f}{g}$ se $g(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in D_g$.

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funções tais que $f(D_f) \subset D_g$ (portanto a função composta $g \circ f$ está bem definida) e $(a_1, \ldots, a_n) \in D_f$. Se f é contínua no ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ e g é contínua em $f(a_1, \ldots, a_n)$ então a função composta $g \circ f$ também é contínua em $(a_1, \ldots, a_n)$.

  CASO PARTICULAR: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g, h : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $g(D) \times h(D) \subset D_f$ e $(a,b) = (g(c), h(c)) \in g(D) \times h(D) \subset D_f$ um ponto obtido a partir do valor real $c \in D$. Se f é contínua no ponto (a,b) e g e h são contínuas em c então a função composta F definida por
  $$F(t) = f(g(t), h(t))$$
  também é contínua em c.

  CASO PARTICULAR: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g, h : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $g(D) \times h(D) \subset D_f$ e $(a,b) = (g(c,d), h(c,d)) \in g(D) \times h(D) \subset D_f$ um ponto obtido a partir do ponto $(c,d) \in D$. Se

f é contínua no ponto (a, b) e g e h são contínuas em (c, d) então a função composta F definida por

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$$

também é contínua em (c, d).

2.1 Exercícios Propostos

1. Calcule os valores de $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que seja contínua em $x = 0$ a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \alpha + \beta & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\exp(\alpha x) - \cos x}{\beta x + x \sin x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$

2. Seja a função $f(x, y) = \dfrac{x + y}{6x - y^2}$. Calcule o limite de f no ponto $(1, 2)$.

3. Seja f a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Estude o limite de f na origem dos eixos.

4. Estude a existência do limite da função definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

no ponto $(0, 0)$.

5. Verifique se a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 - y^2} & \text{se} \quad (x, y) \text{ tal que } x \neq \pm y \\ 1 & \text{se} \quad (x, y) \text{ tal que } x = \pm y \end{cases}$$

tem limite no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

6. Estude a continuidade da função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

7. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^3}{x^4+y^8} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Averigúe se a função f é contínua no ponto $(0,0)$.

8. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } xy < 0 \\ \\ \ln(xy+1) & \text{se } xy \geq 0 \end{cases}.$$

   Averigúe a continuidade de f em pontos do eixo dos xx com abcissa positiva.

9. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Existe algum valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é contínua? Justifique.

10. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2 < 1 \text{ e } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Estude a continuidade da função f na origem.

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Estude a continuidade da função f na origem.

12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^n + py}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

onde n é um número natural e p um número real. Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$ se e só se $n \geq 2$ e $p = 0$.

13. Verifique se é contínua na origem dos eixos a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+4y^2}{x^2-5y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

14. Estude da continuidade da função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-2}{x+3} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

15. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f \equiv \begin{cases} z_1 = \dfrac{x-4}{2y+2} \\ \\ z_2 = \dfrac{y-3}{x^2+1} \end{cases},$$

estude-a quanto à continuidade no ponto $(0,0)$.

16. Diga, justificando, se é prolongável por continuidade no ponto $(0,0)$ a função

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

17. Estude a continuidade da função f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+y^2}{x^4+y^4} & , \quad x^4+y^4\neq 0\\ 0 & , \quad x^4+y^4=0\end{cases}.$$

18. Seja f a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^3+2y^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Estude-a quanto à continuidade.

19. Considere a função f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{y+x\sin x} & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } y\neq -x\sin x\\ 1 & \text{se} \quad (x,y) \text{ tal que } y=-x\sin x\end{cases}.$$

Prove que a função f não é contínua em $(0,0)$.

3 Derivadas e Diferenciais de 1^a Ordem

- Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Um ponto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ é um **ponto interior** a D se existe uma bola aberta $B_\varepsilon(a,b)$ de centro em (a,b) e raio ε contida em D, ou seja,

  $$\exists\varepsilon>0 \mid B_\varepsilon(a,b)\subset D.$$

  O conjunto de todos os pontos interiores ao conjunto D designa-se por **interior de** D e denota-se por $Int(D)$. O conjunto D diz-se **aberto** se todos os seus pontos são interiores, $D=Int(D)$.

  Assim, um ponto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ é interior ao conjunto D se lhe pertence e também pertencem a D todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ "suficientemente próximos" de (a,b).

- Numa função real de duas variáveis reais $z=f(x,y)$ cada uma das variáveis x e y é uma variável independente (z é a variável dependente na função f). Como tal, é possível variar x mantendo y como constante, e vice-versa. É o que se pretende com a seguinte definição de derivada parcial.

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. A **derivada parcial de primeira ordem da f em ordem a x no ponto** (a,b), que se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ (ou $f'_x(a,b)$), é dada pelo limite (em $\mathbb{R}$)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}}.$$

Analogamente, a **derivada parcial de primeira ordem da f em ordem a y no ponto** (a,b), que se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ (ou $f'_y(a,b)$), é dada pelo limite (em $\mathbb{R}$)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}}.$$

- Estas derivadas parciais possuem uma interpretação geométrica simples. Considere curvas sobre a superfície do gráfico da função $z = f(x,y)$ que resultam de cortes sobre essa superfície por planos verticais que passem no ponto $(a,b,f(a,b))$.

  Seja C_1 a curva paralela ao plano xOz que resulta da intersecção da superfície do gráfico da função $z = f(x,y)$ com o plano vertical $y = b$ (é a curva em que o plano vertical $y = b$ "corta" a superfície do gráfico). Assim, a derivada parcial de f no ponto (a,b) em ordem a x é o declive da recta tangente a esta curva C_1 em $x = a$. Sobre a curva C_1 a função $z = f(x,y)$ não varia com y ($y = b$, pois C_1 é o gráfico da função de uma variável $z = f(x,b)$ em que se considera y constante igual a b) o que mostra que a derivada parcial

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

  mede a taxa de variação de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos xx (por unidade de comprimento), ou seja, mede a taxa de variação de f quando se atribui um "acréscimo" ao ponto (a,b) na 1^a coordenada.

  Por outro lado, seja C_2 a curva paralela ao plano yOz que resulta da intersecção da superfície do gráfico da função $z = f(x,y)$ com o plano vertical $x = a$ (é a curva em que o plano vertical $x = a$ "corta" a superfície do gráfico). Assim, a derivada parcial de f no ponto (a,b)

em ordem a y é o declive da recta tangente a esta curva C_2 em $y = b$. Sobre a curva C_2 a função $z = f(x, y)$ não varia com x ($x = a$, pois C_2 é o gráfico da função de uma variável $z = f(a, y)$ em que se considera x constante igual a a) o que mostra que a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

mede a taxa de variação de f no ponto (a, b) na direcção e sentido do eixo dos yy (por unidade de comprimento), ou seja, mede a taxa de variação de f quando se atribui um "acréscimo" ao ponto (a, b) na 2^a coordenada.

- Em muitas situações, o cálculo da derivada parcial em ordem a x num ponto (a, b) é feito pelas muitas regras usuais de derivação ordinária considerando a variável y como constante (após obter a expressão geral da derivada parcial calcula-se o seu valor para $(x, y) = (a, b)$). Analogamente para o cálculo da derivada parcial em ordem a y num ponto (a, b). No entanto, quando a função f é definida por imposição no ponto (a, b) ou (a, b) é um ponto que pertence à "curva de mudança de ramos", apenas é possível o cálculo directo pela definição.

- A existência de derivadas parciais de primeira ordem de valor finito de f num ponto (a, b) não implica a continuidade de f nesse ponto (no entanto implica continuidade relativamente a essa variável). Considere sas seguintes proposições relativas à continuidade.

  PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se as duas funções derivadas parciais de primeira ordem de f existem e são limitadas nos pontos (x, y) de uma bola centrada em (a, b) então a função f é contínua no ponto (a, b).

  PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se as duas funções derivadas parciais de primeira ordem de f existem e são finitas no ponto (a, b) e todas, excepto uma, são limitadas nos pontos (x, y) de uma bola centrada em (a, b) então a função f é contínua no ponto (a, b).

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se as duas derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a, b) existem e são finitas, define-se o **gradiente de f no ponto** (a, b), que se denota por $\overrightarrow{\text{grad} f}(a, b)$ ou $\nabla f(a, b)$ (∇ lê-se *nabla*), como sendo o vector dessas derivadas parciais,

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}\, f}\,(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b)\,, \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b) \right)}.$$

O vector gradiente de f no ponto (a,b) é o vector cujas projecções sobre os eixos coordenados são as correspondentes derivadas parciais de primeira ordem de f nesse ponto (a projecção do vector gradiente sobre o eixo dos xx é a derivada parcial de primeira ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(a,b)$ e a projecção do vector gradiente sobre o eixo dos yy é a derivada parcial de primeira ordem $\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)$) pois

$$\overrightarrow{\text{grad}\, f}\,(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b)\cdot\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)\cdot\overrightarrow{e_2}$$

em que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_n}\} = \{(1,0)\,, (0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

3.1 Exercícios Propostos

1. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}.$$

   Calcule, por definição, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(1,2)\,.$

2. Dada a função real f definida por

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}.$$

   calcule, por definição, o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(2,1)\,.$

3. Dada a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

   calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(0,0)\,.$

4. Dada a função real f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

calcule o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ na origem.

5. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2-y^2} & , \quad x\neq\pm y\\ 4 & , \quad x=\pm y\end{cases}.$$

Calcule o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,-2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,-2)$.

6. Determine o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ sendo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+3y^4}{2x^3-y^3} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

7. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\exp(xy) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Defina as funções derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

8. Seja f a função real definida por $f(x,y)=x^2y-3y$.

   (a) Determine a expressão geral do diferencial de f.

   (b) Calcule no ponto $(4,3)$ o acréscimo Δf e o diferencial df, para os acréscimos -0.01 e 0.02 das variáveis x e y, respectivamente.

   (c) Determine um valor aproximado da imagem $f(1.03, 1.99)$ sem aplicar directamente neste ponto a expressão que define a função f.

9. Calcule as derivadas parciais de 1^a ordem das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{xy}$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{\exp\left(x - 5y^2\right) - y^2}$

   (c) $f(x, y) = \ln \sin \dfrac{x + \alpha}{\sqrt{y}}$

10. Dada a função definida por $z\left(x, y\right) = xy \tan \dfrac{y}{x}$,mostre que x

$$x \frac{\partial z}{\partial x}\left(x, y\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(x, y\right) = 2z\left(x, y\right).$$

11. Seja f a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

   Determine a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right)$.

12. Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - y^3}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

   determine a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right)$.

13. Calcular os diferenciais totais das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = y^2 \ln \dfrac{x}{y}$ para $x = y = 2$, $dx = 0.4$ e $dy = -0.3$

   (b) $f(x, y) = x \sin\left(ax\right) - y \cos\left(by\right)$

   (c) $z = \ln \tan \dfrac{y}{x}$

(d) $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y$ para $x = 3, y = 1, dx = 0.1$ e $dy = -0.2$

(e) $z = xy\exp(x - 2y)$

(f) $z = \sin^2(x) + \cos^2(y)$

14. Dada a função
$$f(x,y) = x^y + \ln^2(xy),$$
calcule o diferencial de primeira ordem desta função no ponto $(1,1)$, para $dx = 0.01$ e $dy = -0.2$. Interprete teoricamente o resultado obtido.

15. Considere a função
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 4y^2}{\sqrt{x^2 + 5y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Determine df e $\triangle f$ no ponto $(1,2)$ com $dx = -0.1$ e $dy = 0.01$.

16. Seja f a função
$$f(x,y) = \sqrt[5]{x + \ln y}.$$
Calcule um valor aproximado de $f(32.1, 1.2)$.

4 Diferencialidade

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. A função f diz-se **diferenciável no ponto** (a,b) se e só se existem e são de valor finito as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ e ainda
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - \left[f(a,b) + (x-a)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0.$$
O limite anterior significa que a expressão
$$f(a,b) + (x-a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$
é uma boa aproximação de $f(x,y)$ para pontos (x,y) próximos de (a,b).

- Por outro lado,

$$\boxed{z = f(a,b) + (x-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

é a equação do plano que passa no ponto $(a, b, f(a,b))$ e que tem

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1 \right)$$

como vector director. Assim, a diferenciabilidade de f no ponto (a,b) traduz-se geometricamente na existência de um plano, designado por **plano tangente ao gráfico de f no ponto** $(a, b, f(a,b))$, que é uma boa aproximação da superfície definida por $z = f(x,y)$ (a superfície do gráfico da função f) numa vizinhança do ponto $(a, b, f(a,b))$. O vector $\overrightarrow{n}$ é designado por **vector normal** ao plano tangente.

- A recta normal ao plano tangente no ponto $(a, b, f(a,b))$ designa-se por **recta normal ao gráfico de f no ponto** $(a, b, f(a,b))$. Tem como vector director o vector normal $\overrightarrow{n}$.

- Considerando as mudanças de variável $x-a = h$ e $y-b = k$, a condição para diferenciabilidade de f no ponto (a,b)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - (x-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - (y-b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

traduz-se em

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2 + h^2}} = 0.$$

Como tal, f é diferenciável no ponto (a,b) se e só se

$$\lim_{h\to 0, k\to 0} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{1}$$

em que

$$\boxed{\varepsilon(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} \tag{2}$$

ou seja,

$$f\left(a+h,b+k\right)-f\left(a,b\right)=h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\left(a,b\right)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\left(a,b\right)+\varepsilon\left(h,k\right).$$

Na prática, para estudar a diferenciabilidade de f num ponto (a,b), obtem-se $\varepsilon\left(h,k\right)$ a partir da igualdade (2) e averigua-se se o limite em (1) é nulo.

- A existência de derivadas parciais de primeira ordem de f num ponto (a,b) interior a D_f garante a existência de duas rectas tangentes ao gráfico de f no ponto $(a,b,f\left(a,b\right))$, paralelas aos planos coordenados xOz e yOz. No entanto, tal não é suficiente (embora necessário) para garantir a existência de um plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a,b,f\left(a,b\right))$. Para tal é necessário que f seja diferenciável em (a,b).

- Qualquer função polinomial é uma função diferenciável, independentemente do número de variáveis.

- Sejam $f:D_f\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:D_g\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $(a,b)\in Int(D_f)\cap Int(D_g)$. Se f e g são diferenciáveis no ponto (a,b) então são diferenciáveis nesse ponto as funções: $f+g$, $f-g$, $f\times g$, $k\cdot f$ (para $k\in\mathbb{R}$) e $\dfrac{f}{g}$ se $g\left(x,y\right)\neq 0$ para todo o $(x,y)\in D_g$.

- A análise do limite (igual a 0) que é exigido para a diferenciabilidade num ponto, conduz à proposição seguinte.

  PROPOSIÇÃO: Sejam $f:D_f\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ um ponto interior de D_f. Se a função f é diferenciável no ponto (a,b) então a aproximação

  $$f\left(a+h,b+k\right)-f\left(a,b\right)\approx h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\left(a,b\right)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\left(a,b\right)$$

  é válida no cálculo de valores aproximados da função f em torno de (a,b).

  Assim, é possível calcular valores aproximados das imagens por f em pontos $(a+h,b+k)$ próximos de (a,b) a partir da imagem $f\left(a,b\right)$ e das derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a,b),

  $$f\left(a+h,b+k\right)\approx f\left(a,b\right)+h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\left(a,b\right)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\left(a,b\right).$$

Em concreto, se a função f é diferenciável no ponto (a, b), define-se o **diferencial de primeira ordem** (ou simplesmente **diferencial**) **de** f **no ponto** (a, b) **para os acréscimos** h **e** k **das variáveis** x **e** y**,** que se denota por $df\,(a, b)$, como sendo

$$df\,(a,b) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)\,.$$

É usual a notação dx e dy (em vez de h e de k, respectivamente) para os acréscimos das variáveis x e y na expressão do diferencial de f num ponto (a, b), ou seja, é usual considerar

$$\boxed{df\,(a,b) = dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b) + dy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)}\,.$$

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. A diferença

$$f\,(a+dx, b+dy) - f\,(a,b)$$

designa-se por **acréscimo da função** f **no ponto** (a, b) relativo aos acréscimos dx e dy das variáveis x e y, respectivamente, e denota-se por Δf.

Conclui-se da Proposição acima que o diferencial de primeira ordem de f no ponto (a, b) é uma boa aproximação do acréscimo da função f no ponto (a, b) relativo aos acréscimos dx e dy das variáveis x e y, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Delta f\,(a,b) &= f\,(a+dx, b+dy) - f\,(a,b) \\ &\approx dx \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b) + dy \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b) = df\,(a,b)\,. \end{aligned}$$

Esta aproximação deve entender-se do seguinte modo: se dx e dy forem acréscimos relativamente pequenos quando comparados com a e b, então $df\,(a, b)$ é uma boa aproximação de $\Delta f\,(a, b)$. Assim, o diferencial de primeira ordem de f no ponto (a, b) permite obter valores proximados das imagens por f em pontos $(a + dx, b + dx)$ próximos de (a, b),

$$\boxed{f\,(a+dx, b+dy) \approx f\,(a,b) + df\,(a,b)}\,.$$

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se a função f é diferenciável no ponto (a,b) então f é contínua nesse ponto.

  Temos

  $$\text{Diferenciabilidade em } (a,b) \quad \Longrightarrow \quad \text{Continuidade em } (a,b)\,.$$

  A implicação inversa não é válida: existem funções contínuas num ponto sem que sejam diferenciáveis nesse ponto (a diferenciabilidade é "mais exigente" que a continuidade). No entanto, se é conhecido que determinada função não é contínua num ponto (a,b) então está garantido que ela também não é diferenciável nesse ponto,

  $$\text{Descontinuidade em } (a,b) \quad \Longrightarrow \quad \text{Não-diferenciabilidade em } (a,b)$$

  (pela negação da implicação, $(D \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\sim C \Rightarrow \ \sim D)$).

- A existência de derivadas parciais de primeira ordem de f num ponto (a,b) interior a D_f de valor finito são condição necessária para a diferenciabilidade de f em (a,b). No entanto, a existência de derivadas parciais de primeira ordem de f num ponto (a,b) interior a D_f de valor finito não garante, só por si, a diferenciabilidade de f em (a,b). Note-se ainda que existência de tais derivadas parciais de valor finito nem sequer garante a continuidade de f em (a,b).

  Condição suficiente de diferenciabilidade. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se existem e são de valor finito as derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a,b) e se uma das funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ é contínua numa bola aberta de centro (a,b) então f é diferenciável no ponto (a,b).

  PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se a função f é diferenciável no ponto (a,b) então as derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a,b) são finitas. Além disso, as funções derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas no ponto (a,b).

4.1 Exercícios Propostos

1. Considere a seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Verifique se a função f é diferenciável na origem.

2. Dada a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin(y) + y^2 \sin x}{x^2+y} & \text{se } y \neq -x^2 \\ 1 & \text{se } y = -x^2 \end{cases},$$

   determine o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Considerando $\alpha = 0$, determine as derivadas parciais de 1^a ordem de f na origem.

   (b) Estude a diferenciabilidade de f na origem.

   (c) Para $\alpha = 0$, defina as derivadas parciais de 1^a ordem da função f.

4. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^5 + x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Estude a continuidade da função f no ponto $(0,0)$

(b) Com base no resultado da alínea a) que pode concluir quanto à diferencialidade da função f em $(0,0)$? Justifique.

5. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

(b) Estude a diferenciabilidade da função f na origem.

6. Seja f a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y-1} & , \quad y \neq 1 \\ \\ 0 & , \quad y = 1 \end{cases}.$$

Mostre que a função f não é diferenciável no ponto $(2,1)$.

7. Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \beta + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2},$$

com $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Indique o domínio da função f.

(b) Mostre que $f(x,y)$ é prolongável por continuidade na origem e determine o valor a atribuir à imagem de $(0,0)$ na função prolongamento.

(c) Estude, no ponto $(0,0)$, a diferencialidade da função prolongamento definida na alínea anterior. (Nota: se não respondeu à alínea anterior, considere $f(0,0) = \beta = 1$).

8. Considere a função real $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^n+py}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

onde n é um número natural e p um número real.

(a) Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(b) Estude a diferenciabilidade da função f na origem.

5 Regra de Derivação da Função Composta

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funções vectoriais tais que $f(D_f) \subset D_g$ (portanto a função composta $g \circ f$ está bem definida) e $(a_1, \ldots, a_n)$ um ponto interior a D_f. Se f é diferenciável no ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ e g é diferenciável em $f(a_1, \ldots, a_n) \in Int(f(D_f))$ então a função composta $g \circ f$ também é diferenciável em $(a_1, \ldots, a_n)$ e é válida a **regra da cadeia** (ou **regra da função composta**) que se traduz pela seguinte igualdade entre matrizes Jacobianas (definição no Capítulo 11)

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{J}(g \circ f)(a_1, \ldots, a_n)}_{\text{matriz } p \times n} = \underbrace{\mathbf{J}g(f(a_1, \ldots, a_n))}_{\text{matriz } p \times m} \cdot \underbrace{\mathbf{J}f(a_1, \ldots, a_n)}_{\text{matriz } m \times n}}.$$

CASO PARTICULAR: Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é uma função vectorial de variável real diferenciável em a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função real de duas variáveis reais diferenciável em $(b, c) = f(a) = (f1(a), f2(a))$, então a função composta F definida por

$$F(t) = g(f_1(t), f_2(t)) \equiv g(u, v)$$

(representamos os argumentos $f_1(t)$ e $f_2(t)$ por u e v, respectivamente) é diferenciável em a e a sua derivada (total) é

$$\begin{aligned} F'(a) &= \frac{dF}{dt}(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(b,c) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(b,c) \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t}(a) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial t}(a) \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(b,c) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial t}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b,c) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial t}(a) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(b,c) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(b,c) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(a). \end{aligned}$$

CASO PARTICULAR: Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função vectorial de variável real diferenciável em (a, b) e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função real de duas variáveis reais diferenciável em $(c,d) = f(a,b) = (f1(a,b), f2(a,b))$, então a função composta F definida por

$$F(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y)) \equiv g(u,v)$$

(representamos os argumentos $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ por u e v, respectivamente) é diferenciável em (a,b) e é válida a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{2\times 2},$$

sendo as derivadas parciais da primeira e da terceira matrizes calculadas no ponto (a,b) e as da segunda matriz calculadas no ponto $(c,d) = f(a,b) = (f_1(a,b), f_2(a,b))$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(c,d) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial v}(c,d) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(a,b). \end{aligned}$$

- Para cada função F que resulte da composição de outras funções é conveniente a construção de um *esquema em "árvore"* que ilustre todas as dependências entre as funções envolvidas. A leitura desse esquema permite a aplicação correcta da regra da cadeia: considera-se a soma das contribuições relativas a cada caminho e a cada um destes o produto de derivadas.

5.1 Exercícios Propostos

1. Considere a função composta

$$f(x,y) = \tan\left(x^2 + y^2\right)$$

em que $x = t^2 - 3t$ e $y = \ln t$. Determine a expressão da derivada (total) $f'(t)$.

2. Use a regra da cadeia para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo

$$f = \left(x^2 + y^2\right) \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3. Considere $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + cy^2$, com $x = uv$, $y = \ln(u) - \sqrt{v}$, $u = s^2$ e $v = s + 1$. Obtenha a derivada $f'(s)$.

4. Mostre que a função $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ verifica a equação

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

qualquer que seja a função f.

5. Use a regra da cadeia para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo

$$f = \ln\left(xy^2 + x^2y + \sqrt{1 + \left(xy^2 + x^2y\right)^2}\right).$$

6. Sendo $z = f(u, v)$ com $u = x^2 - y^2$ e $v = \exp(xy)$, determine a expressão de cada uma das derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

7. Demonstre que para a função $z = yf\left(x^2 - y^2\right)$ se tem

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{z(x, y)}{y^2}.$$

8. Dada a função

$$z(x, y) = x^\alpha g\left(\frac{y}{x}\right),$$

com α constante, determine a expressão de $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

9. Sendo

$$U(x, y, z) = x - \sin(y) + 2z$$

com $x = 2v + t$, $y = \ln v$, $z = t^v$, $t = \sec w$ e $v = \sec\left(w^2\right)$, determine a expressão da derivada (total) $\frac{dU}{dw}(w)$ (Nota: indique apenas os cálculos).

10. Seja
$$z(x,y) = \tan\left(x^2 + y^2\right)$$
com $x = t^2 - 3t$ e $y = \ln t$. Determine a expressão da derivada (total) $\dfrac{dz}{dt}$ (Nota: indique apenas os cálculos).

11. Para $V(x,y,z) = xy^2 h\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{z}\right)$, mostre que
$$x\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = 3V.$$

6 Derivada Direccional e Dirigida

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais, (a,b) um ponto de $\mathbb{R}^2$ interior a D_f e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ um vector não-nulo de $\mathbb{R}^2$. A **derivada direccional de f no ponto (a,b) segundo o vector $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2)$**, que se denota por $f'_{(v_1,v_2)}(a,b)$ (ou $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$) é definida pelo limite (em $\mathbb{R}$)
$$\begin{aligned} f'_{(v_1,v_2)}(a,b) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b) + h\cdot(v_1,v_2)) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv_1, b+hv_2) - f(a,b)}{h}. \end{aligned}$$
Quando se considera o versor de $\overrightarrow{v}$,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{vers}(\overrightarrow{v}) &= \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{\|(v_1,v_2)\|}\cdot(v_1,v_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\cdot(v_1,v_2) = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right), \end{aligned}$$
temos o caso particular de derivada dirigida.

- Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} = (1,0)$, o primeiro vector da base canónica $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$, tem-se
$$\begin{aligned} f'_{\overrightarrow{e_1}}(a,b) &= f'_{(1,0)}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f((a,b)+h\cdot(1,0)) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \end{aligned}$$

que mede a taxa de variação de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos xx (por unidade de comprimento visto que o vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} = (1,0)$ é unitário). Analogamente, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2} = (0,1)$, o segundo vector dessa base, tem-se

$$\begin{aligned} f'_{\overrightarrow{e_2}}(a,b) &= f'_{(0,1)}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b)+h\cdot(0,1)) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \end{aligned}$$

que mede a taxa de variação de f no ponto (a,b) na direcção e sentido do eixo dos yy (por unidade de comprimento visto que o vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2} = (0,1)$ é unitário).

Enquanto pelas derivadas parciais de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

se faz, respectivamente, variar x mantendo y como constante e vice-versa, através da derivada direccional é possível considerar ambas as variáveis x e y a variar simultaneamente.

- Se a função f é diferenciável no ponto (a,b), e não é definida por imposição nesse ponto, então

$$\boxed{f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = (v_1,v_2) | \overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)},$$

para todo o vector $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2) = v_1 \cdot (1,0) + v_2 \cdot (0,1)$. A fórmula anterior pode reescrever-se como

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \|(v_1,v_2)\| \cdot \left\|\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b)\right\| \cdot \cos\theta}$$

em que θ é o menor ângulo entre os vectores

$$\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b) \neq \overrightarrow{0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v} = (v_1,v_2) \neq \overrightarrow{0}$$

(também válida em $\mathbb{R}^3$).

Quando $\|\overrightarrow{v}\| = \|(v_1,v_2)\| = 1$ tem-se apenas

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \left\|\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b)\right\| \cdot \cos\theta}.$$

Neste caso, e considerando $\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b) \neq \overrightarrow{0}$, a derivada dirigida $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$:

- é igual a 0 quando o vector $\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)$ e o vector unitário $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ são ortogonais, pois neste caso $\cos\theta = 0$ (visto que $\theta = 90^o = \pi/2\ rad$);
- atinge o valor máximo igual a $\left\|\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)\right\|$,

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \left\|\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)\right\|},$$

  quando $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ é o vector unitário paralelo e com o mesmo sentido do vector $\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)$,

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = \frac{\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)}{\left\|\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)\right\|},$$

  pois 1 é o valor máximo de $\cos\theta$ e é obtido quando que $\theta = 0^o$ ($\theta = 0\ rad$);
- atinge o valor mínimo igual a $-\left\|\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)\right\|$,

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = -\left\|\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)\right\|},$$

  quando $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ é o vector unitário paralelo e com sentido oposto ao vector $\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)$,

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = -\frac{\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)}{\left\|\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)\right\|},$$

  pois -1 é o valor mínimo de $\cos\theta$ e é obtido quando que $\theta = 180^o$ ($\theta = \pi\ rad$).

Como tal, a taxa de variação de f no ponto (a,b) é máxima (respectivamente, mínima) na direcção e sentido do vector unitário (único) $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ que tenha a mesma direcção e o mesmo sentido do (respectivamente, sentido oposto ao) vector $\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b)$.

EXEMPLO: Suponha que uma certa função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem num certo ponto (a,b) o vector gradiente $(3,4)$, $\overrightarrow{\text{grad} f}(a,b) = (3,4)$. O vector unitário $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ com a mesma direcção e sentido do vector gradiente $(3,4)$ é

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

pois $\|(3,4)\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Como tal, a taxa de variação máxima de f no ponto (a,b) é 5, dada pela derivada dirigida

$$\begin{aligned} f'_{(3/5,4/5)}(a,b) &= \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\Big|(3,4) = \frac{3}{5}\cdot 3 + \frac{4}{5}\cdot 4 \\ &= \frac{9}{5}+\frac{16}{5} = 5 = \left\|\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b)\right\|. \end{aligned}$$

O vector unitário $\overrightarrow{v}' = (v_1', v_2')$ com a mesma direcção e sentido oposto ao vector gradiente $(3,4)$ é

$$\overrightarrow{v}' = \left(v_1', v_2'\right) = -\left(v_1, v_2\right) = -\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right).$$

Como tal, a taxa de variação mínima de f no ponto (a,b) é -5, dada pela derivada dirigida

$$\begin{aligned} f'_{(-3/5,-4/5)}(a,b) &= \left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)\Big|(3,4) = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 3 + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 4 \\ &= -\frac{9}{5}-\frac{16}{5} = -5 = -\left\|\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b)\right\|. \end{aligned}$$

- Considere $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Se é conhecido o ângulo α que um vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ faz com a parte positiva do eixo dos xx então são válidas as relações

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\overrightarrow{v}\|} \quad \text{e} \quad \sin\alpha = \frac{v_2}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Como tal, é possível estabelecer a proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (a,b) um ponto de $\mathbb{R}^2$ interior a D_f e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ um vector não-nulo de $\mathbb{R}^2$. Suponha ainda que a função f é diferenciável no ponto (a,b) e não é definida por imposição nesse ponto. Se α é o ângulo que o vector $\overrightarrow{v}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx então a derivada direccional $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$ pode ser calculada por

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \cos\alpha\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \sin\alpha\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

Se $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ é o caso particular de um vector unitário então a derivada dirigida $f'_{\overrightarrow{v}}(a,b)$ pode ser calculada por

$$\boxed{f'_{\overrightarrow{v}}(a,b) = f'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \cos\alpha\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \sin\alpha\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

6.1 Exercícios Propostos

1. Considere a função f definida por $f(x,y) = \sin(xy) + xy^2 + 3x$.

   (a) Determine a derivada direccional de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $\overrightarrow{v} = (1,-1)$;

   (b) Calcule a derivada dirigida no mesmo ponto segundo a mesma direcção e sentido.

2. Dada a função f definida por $f(x,y) = \sin(xy) + xy^2$, calcule a derivada direccional de f no ponto $(0,0)$ segundo a direcção do vector $\overrightarrow{v} = (1,2)$.

3. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = xy \sin \frac{x}{y}.$$

   (a) Determine o vector gradiente de f no ponto $(0,1)$;

   (b) Determine a derivada dirigida de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $\overrightarrow{v} = \left(\sqrt{3}/2, 1/2\right)$.

4. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Calcule a derivada direccional de f no ponto $(0,0)$ segundo a direcção do vector $\overrightarrow{u} = (a,b)$, com $a \neq 0$.

5. Determinar a derivada dirigida da função $f(x,y) = y \exp x$ no ponto $(0,3)$ na direcção que faz os seguintes ângulos com a parte positiva do eixo $0x$:

   (a) 30^o

   (b) 120^o

6. Calcule a derivada dirigida da função $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ no ponto $P(2,1)$ segundo a direcção da recta que une o ponto P ao ponto $Q(5,5)$.

7. Calcular a derivada dirigida da função $f(x,y) = x^2 + y^2$

   (a) nos pontos (x,y) da semi-recta $y = x$, com $x > 0$ e $y > 0$, segundo a direcção desta semi-recta;

   (b) na direcção do raio e na direcção da recta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$.

8. Determine o vector gradiente das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = y^2 \ln \frac{x}{y}$ para $x = y = 2$

   (b) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 3y$ no ponto (x,y) em que as derivadas parciais de 1^a ordem são nulas.

9. Dada a função $f(x,y) = \exp(x) + \exp(y)$, calcule a derivada dirigida da função f no ponto $(1,0)$ na direcção em que é máxima.

10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y\sin^2(x) + x^2 y$.

    (a) Determine o vector $\overrightarrow{v}$ para o qual a derivada dirigida da função f é dada pela expressão $f'_{\overrightarrow{v}}(x,y) = \sin^2(x) + x^2$;

    (b) Verifique que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sin^2(x) + x^2$ é de classe C^∞ e mostre que

$$\frac{d^5 g}{dx^5}(x) = g^{(5)}(x) = 16\sin(2x).$$

11. Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x\sin^2(y) + xy^2$. Diga, justificando, em que direcção $\overrightarrow{u}$ é que a derivada dirigida da função é dada pela expressão

$$f'_{\overrightarrow{u}}(x,y) = \sin^2(y) + y^2.$$

7 Função Homogénea

- Seja α um número racional ($\alpha \in \mathbb{Q}$). Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se **homogénea de grau** α se e só se verifica a igualdade

$$f(t \cdot x_1, t \cdot x_2, \ldots, t \cdot x_n) = t^\alpha \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

- Prova-se ainda que se f é homogénea de grau α então todas as suas derivadas parciais de primeira ordem são homogéneas de grau $\alpha - 1$.

- Qualquer função homogénea de grau α verifica a **Identidade de Euler**
$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \cdot f(x, y).$$

7.1 Exercícios Propostos

1. Mostre que as seguintes funções são homogéneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique ainda a Identidade de Euler:

   (a) $f(x, y) = \ln \dfrac{(x+y)^2}{xy}$

   (b) $f(x, y, z) = \sin \dfrac{x+y}{z}$

   (c) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$

   (d) $f(x, y, z) = y \dfrac{x+y+z}{x-z}$

   (e) $f(x, y) = \left(\dfrac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4}\right)^{1/2}$

   (f) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2 (\ln x - \ln y)$. Averigúe se a função f é homogénea e, no caso afirmativo, verifique a Identidade de Euler.

3. Considere a função homogénea $f(x, y) = Ax^\alpha y^\beta$.

   (a) Verifique que
   $$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = (\alpha + \beta) \cdot f(x, y).$$
   O que conclui? Justifique a sua resposta.

   (b) Mostre, por definição, que a função $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é homogénea de grau $\alpha + \beta - 1$.

4. Seja f a função

$$f(x,y) = \left(3x^{-\alpha} + 5y^{-\alpha}\right)^{-1/6}.$$

   (a) Determine o valor do parâmetro real α para o qual a função f é homogénea de grau $1/2$.
   (b) Verifique a Identidade de Euler considerando o valor de α obtido na alínea a).

5. Considere a função

$$f(x,y) = \frac{x^b}{y^a} + x^2 y + \frac{y^{2a}}{x^b}$$

   sendo a e b parâmetros reais.

   (a) Calcule os valores de a e de b de modo que a função f seja homogénea.
   (b) Para os valores de a e b obtidos na alínea a), qual o grau de homogeneidade da função f?

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{x}{y}\right) - g\left(\frac{y-x}{x}\right)$$

   onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.

   (a) Averigúe se a função f é homogénea.
   (b) Calcule a derivada dirigida de f no ponto $(1,1)$ segundo o vector $\overrightarrow{v} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.
   (c) Admitindo que $g'(0) = 1$, determine o vector gradiente de f no ponto $(1,1)$.

7. Sendo

$$g(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

   em que f é uma função diferenciável no seu domínio, mostre que

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + z\frac{\partial g}{\partial z}(x,y) = n \cdot g(x,y)$$

(a) aplicando a Identidade de Euler

(b) pela regra de derivação da função composta.

8. Seja f a função

$$f(x,y) = \frac{x^2 + x^\alpha y^\beta}{y^\beta + x^\gamma} + x^\alpha \sin\frac{x}{y}.$$

(a) Determine os valores dos parâmetros reais α, β e γ de modo que a função seja homogénea, indicando o respectivo grau.

(b) Verifique, para os valores paramétricos obtidos na alínea a), a Identidade de Euler.

9. Estude a homogeneidade da função

$$g(x,y,z) = x^2 + x^\alpha y^{\beta-3} - z^{3\alpha} y^\beta$$

em função dos parâmetros reais α e β:

(a) recorrendo directamente à definição;

(b) utilizando a Identidade de Euler.

10. Considere a função

$$h(x,y) = \frac{x^2}{y^{\beta-\alpha}} + 5x^\beta y^{3/2} + \frac{\sqrt{y}}{6}.$$

Indique para que valores de α e β a função h é homogénea.

11. Considere a função

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^\alpha + x^{\gamma-1}}{y^{2-\beta}}.$$

Determine os valores de α, β e γ de modo que a função f seja homogénea de grau 1.

12. A função $z(x,y) = x^2 g\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$ verifica a equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2z(x,y).$$

Como interpreta esta igualdade em termos de homogeneidade?

13. Seja $f(x, y)$ uma função homogénea do 2^o grau. Considere ainda a função $g(x, y) = xf(x, y)$.

    (a) Qual o grau de homogeneidade da função g?

    (b) Mostre que as derivadas parciais g'_x e g'_y são funções homogéneas do 2^o grau.

    (c) Mostre que a função g verifica a Identidade de Euler.

14. Prove que toda a função do tipo

$$z(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

é homogénea de grau 0. Verifique a Identidade de Euler para essas funções.

15. Considere a função $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$

    (a) Prove que a função f é homogénea e indique o grau de homogeneidade;

    (b) Verifique a Identidade de Euler para a função f.

16. Sem calcular as derivadas parciais, prove que

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

sabendo que $f(x, y) = \ln \dfrac{y}{x}$ e supondo que esta função é diferenciável.

17. Considere as funções

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Mostre que f e g são funções homogéneas e verifique os teoremas que conhece sobre funções homogéneas.

18. Para

$$f(x, y) = x^k y^{2+k} + yx,$$

utilize a Identidade de Euler para determinar k de modo que a função f seja homogénea. Determine ainda o seu grau de homogeneidade.

19. Sendo

$$f(x,y) = \frac{x^a}{y^b} + xy^3 + \frac{y^{b-1}}{x},$$

calcule a e b de modo a que a função seja homogénea. Indique ainda o respectivo grau de homogeneidade.

20. Considere a função $f(x,y) = (5x^k + 2y)^2$.

    (a) Determine para que valores de k esta função é homogénea e qual o seu grau de homogeneidade.

    (b) Para o valor de k obtido na alínea a), prove a Identidade de Euler para a função f, verificando também que as derivadas parciais de 1^a ordem da função são funções homogéneas.

21. Dada a função

$$z(x,y) = 2x^2 \ln\left(\alpha^{1/x^2}\right) - 6y^3 \ln\left(b^{1/y^3}\right),$$

    (a) verifique se a função é homogénea e, em caso afirmativo, diga qual o grau de homogeneidade;

    (b) interprete o significado do grau de homogeneidade de uma função, utilizando o resultado da alínea anterior.

22. A função $z(x,y,t) = y^3 f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{x}\right)$ verifica a igualdade

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,t) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,t) + t\frac{\partial z}{\partial t}(x,y,t) = 3z(x,y,t).$$

Como interpreta esta igualdade em termos de homogeneidade?

23. Considere a função $z(x,y) = ax^u y^v$.

    (a) Demonstre que a função verifica a igualdade

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = (u+v)\, z(x,y).$$

    (b) Como interpreta a igualdade anterior? Justifique, efectuando os cálculos necessários.

24. Considere a seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y} & \text{se} \quad x+y>0 \\ \\ \dfrac{x^2+y^2}{x+y} & \text{se} \quad x+y \leq 0 \end{cases}.$$

Determine o grau de homogeneidade de f, para $x+y \leq 0$.

25. Seja f a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3y^2-x} & \text{se} \quad x \neq 3y \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = 3y \end{cases}.$$

Averigue se f é homogénea para $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 3y\right\}$ Justifique.

26. Considere a função

$$z\,(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x} f\left(\frac{x^2-y^2}{x}\right)$$

em que f é uma função homogénea de grau 1.

(a) Qual o grau de homogeneidade de z.

(b) Mostre que z verifica Identidade de Euler.

27. Considere a função

$$f(x,y,z) = x^2 z + \left(\frac{x^a}{y^4}\right)^{1/4} + \frac{y^b}{x}.$$

(a) Determine o domínio de definição da função f;

(b) Determine os valores de a e de b que tornam f uma função homogénea e, considerando esses valores, verifique a Identidade de Euler.

28. Sendo

$$f(x,y) = x^k y^{k+1} + x^2 y$$

(k número inteiro), utilize a Identidade de Euler para determinar k de modo que f seja homogénea e determine o seu grau de homogeneidade.

29. Considere a seguinte função de produção

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

com $k > 0$ e $L > 0$. Trata-se da função de Cobb-Douglas com dois factores de produção, o capital K e o trabalho L.

(a) Determine o grau de homogeneidade da função de Cobb-Douglas;

(b) Supondo $\alpha = 0.75$,.verifique a Identidade de Euler;

(c) Prove que a produtividade marginal do capital, $\dfrac{\partial Y}{\partial K}$, é homogénea de grau 0.

30. Sabendo que

$$v(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right),$$

em que f é uma função diferenciável, aplique a Identidade de Euler para mostrar que

$$x\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + z\frac{\partial v}{\partial z}(x,y) = nv(x,y).$$

31. Sendo f uma função diferenciável e homogénea de grau 1, prove que a função.

$$g(x,y) = xf\left(x-y, \frac{y^2-x^2}{y}\right)$$

verifica a seguinte igualdade $x = 2g(x,y)$. Comente o resultado obtido.

32. Seja F a função

$$F(x,y,z) = \left(\frac{y}{3}\right)^n + \left(\frac{z}{3}\right)^x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Verifique se a função F é homogénea. Em caso afirmativo, determine o seu grau de homogeneidade.

33. Seja $z = f(u,v)$ uma função composta em que $u = x^3$e $v = x^2y$. Sabe-se que $f(u,v)$ é uma função homogénea de grau 2 e de classe C^2. Considere ainda que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(8,4) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(8,4) = 2.$$

(a) Calcule o valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,1)$ e de $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,1)$.

(b) Determine $f(8,4)$.

(c) Qual o valor da derivada de z, no ponto $(x,y)=(2,1)$ segundo a direcção do vector $(-1,0)$? Como se denomina esta derivada?

(Chapter head:)Derivadas e Diferenciais de Ordem Superior à Primeira

8 Derivadas Parciais de Ordem Superior

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Admitamos que as duas derivadas parciais de primeira ordem têm valor finito num ponto (a,b). É possível averiguar a existência de derivadas parciais de segunda ordem de f em (a,b). As derivadas parciais de segunda ordem (cujo cardinal será 4 ou inferior) resultam de derivar (mais uma vez) as duas derivadas parciais de primeira ordem em relação a cada uma das variáveis x e y.

  Em concreto, definem-se as quatro derivadas parciais de segunda ordem de f no ponto (a,b) como as derivadas parciais de primeira ordem da função $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, que são

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = f''_{xx}(a,b) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = f''_{xy}(a,b) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b+h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h},$$

bem como da função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, a saber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = f''_{yx}(a,b) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = f''_{yy}(a,b) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b+h) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}.$$

As derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

são designadas por **derivadas mistas** (**cruzadas** ou **rectangulares**) **de segunda ordem**.

- De modo análogo, é possível considerar sucessivamente derivadas parciais de ordem superior por derivação das derivadas parciais de ordem imediatamente inferior. Existem $2^3 = 8$ derivadas parciais de terceira ordem, $2^4 = 16$ derivadas parciais de quarta ordem e, genericamente, 2^k derivadas parciais de ordem k.

- Tal como para as derivadas parciais de primeira ordem deve-se, sempre que permitido, recorrer às regras de derivação usuais no cálculo das derivadas parciais de ordem superior.

- Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se **de classe** C^k**num conjunto aberto** A contido em D_f, com $k \in N_0$, se admite derivadas parciais contínuas em todos os pontos de A até à ordem k (inclusive). Escreve-se $f \in C^k(A)$ ou simplesmente $f \in C^k$. Se $f \in C^k(A)$ com k tão grande quanto se queira, f diz-se **de classe** $C^\infty(A)$ e escreve-se $f \in C^\infty(A)$.

  Em particular, dado um conjunto aberto $A \subset D_f$, f é de classe C^0 em A se é contínua nos pontos de A, f é de classe C^1 em A se é contínua e admite derivadas parciais de primeira ordem contínuas nos pontos de A, f é de classe C^2 em A se é contínua e admite derivadas parciais de primeira e de segunda ordem contínuas nos pontos de A. A função f é de classe C^2 em A se as derivadas parciais de f de primeira ordem forem de classe C^1. Atendendo à condição suficiente de diferenciabilidade, se f é de classe C^1 numa bola aberta centrada em (a,b) então f é diferenciável em (a,b).

- Considere o seguinte teorema que garante a igualdade das derivadas parciais mistas de segunda ordem sob certas condições.

  Teorema de Schwartz. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se existem e são contínuas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ em todos os pontos (x,y) de uma bola aberta centrada em (a,b) e a função $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua no ponto (a,b) então também existe a derivada parcial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ e

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)}.$$

Em particular, quando f é de classe C^2 é válido o Teorema de Schwartz. Tomando condições análogas às do teroema anterior, mantêm-se válida a igualdade de derivadas parciais mistas de ordem superior à segunda, mesmo que seja distinta a sequência (ordem) de derivação, mas desde que seja preservado o número de vezes que se deriva em ordem a cada uma das variáveis. Por exemplo, é válida a relação

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(a,b)$$

entre derivadas mistas, para condições semelhantes às do teorema anterior. Mais geralmente, se f é de classe C^k então é indiferente a sequência (ordem) de derivação até à ordem k, apenas há que atender ao número de vezes que se deriva em ordem a cada variável.

- **Teorema de Young (formulação 1).** Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se existem as derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em todos os pontos (x,y) de uma bola aberta centrada em (a,b) e são diferenciáveis em (a,b) então é válida a igualdade

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)}.$$

Teorema de Young (formulação 2). Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se existem as derivadas parciais de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em todos os pontos (x,y) de uma bola aberta centrada em (a,b) e são contínuas em (a,b) então é válida a igualdade

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)}.$$

Note-se que a diferenciabilidade das funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no ponto (a,b) garante a existências das derivadas parciais de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$.

8.1 Exercícios Propostos

1. Mostre que se $z(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

2. Dada a função $g(x,y) = 2xy^2 + 4\ln\left(4^{x^3}\right)$ determine, pela definição, a expressão da derivada parcial de 2^a ordem $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$.

3. Calcule o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ sendo f a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(x-y)}{x+y} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

4. Para a função $z(x,y) = y^2\exp(x) + x^2y^3 - 1$, determine a expressão das derivadas parciais de 3^a ordem $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}(x,y)$.

5. Dada a função $g(x,y) = [\exp(x) + \sin(x)]\ln y$, determine as derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^3 g}{\partial y \partial x \partial y}(x,y)$.

6. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{se} \ \ x \neq \pm y \\ 0 & \text{se} \ \ x = \pm y \end{cases}.$$

Calcule o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

7. Considere a função real $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln\left(x^2+y^2\right)} & \text{se } x^2+y^2<1 \text{ e } (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

   (a) Defina as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$. Investigue se são válidas as hipóteses do teorema de Schwartz.

   (b) Estude a diferenciabilidade da função f na origem.

8. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y^2\left(\ln x - \ln y\right)$. Tratando-se de uma função homogénea de grau 2, é válida a Identidade de Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y).$$

   Mostre que:

   (a) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(2-1)f(x,y)$;

   (b) $x^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3x^2y\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 2(2-1)(2-2)f(x,y)$.

9. Sendo $h(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$, prove que

$$x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

   Interprete esta igualdade com base na Identidade de Euler.

10. Dada a função $f(x,y) = (1+x)^m (1+y)^n$, calcule todas as derivadas parciais de 2^a ordem de f.

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{se } xy \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$ enquanto $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

(b) Indique uma hipótese do Teorema de Schwartz que não é verificada pela função f.

12. Considere a função F definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\arctan\dfrac{y}{x} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,y) \\ \\ \dfrac{\pi}{2}y^2 & \text{se} \quad (x,y) = (0,y) \end{cases}.$$

Calcule as segundas derivadas mistas de F na origem. Que pode afirmar sobre a continuidade de $F''_{xy}(x,y)$ na origem?

13. Determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ sendo f a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(y-x)^2 + x^2y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

14. Para a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \ln(x-y) & \text{se} \quad y \neq x \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ nos pontos (a,b) do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ e ainda $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

15. Considere a função $f(x,y) = x^\delta + 4xy + 4y^{\epsilon-1}$.

(a) Prove que f é homogénea, e discuta o seu grau de homogeneidade em função de δ e ϵ.

(b) Para os valores determinados na alinea anterior, demonstre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ verifica a Identidade de Euler e comente o resultado.

16. Seja $z(x,y) = ax^{u}y^{v}$. Prove a igualdade

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = (u+v-1)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$$

e comente o segundo membro tendo em conta a Identidade de Euler.

17. Seja $f(x,y)$ uma função homogénea de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(x+y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2y.$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções homogéneas de grau 1, determine as suas expressões analíticas.

9 Derivação da Função Composta para Ordens Superiores

- Para a obtenção das derivadas parciais (ou total) de segunda ordem aplica-se a regra da cadeia à derivada parcial de primeira ordem conveniente (também neste caso um *esquema em "árvore"* para essa derivada parcial (ou total) de primeira ordem é facilitador).

9.1 Exercícios Propostos

1. Determine a expressão da derivada (total) $\frac{d^2 f}{dt^2}(t)$ sendo f a função

$$f(x,y) = \ln\frac{x}{y},$$

em que $x = \sin t$ e $y = \cos t$.

2. Dada a função $W(x) = (x+4)^2$ com $x = u^2 - v^2$, calcule as derivadas parciais de 2^a ordem

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}(u,v), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}(u,v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}(u,v).$$

3. Seja g uma função contínua na origem e $f(x,y) = xyg(x,y)$. Use a definição para calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

4. Considere a função $f(x,y) = xg\left(\dfrac{y}{x}\right) + h\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

   (a) Determine a expressão da derivada parcial de 2^a ordem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

   (b) Mostre que é válida a igualdade

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

5. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + xy\varphi\left(ax - by, x + y^2\right),$$

   em que φ é uma função de classe C^2. Determine as expressões gerais das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

6. Determine a expressão de $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y)$ sendo $U = f(x,y,z)$ com $z = \varphi(x,y)$.

7. Considere $f(x,y) = x^2y^2$ em que $x = \sin t$ e $y = \cos t$. Determine a expressão da derivada (total) $\dfrac{d^2 f}{dt^2}(t)$.

8. Seja a função $W = F(u)$ com $u = f(x)g(y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}(x,y).$$

9. Demonstre que a função $z = f\left[x + \varphi(y)\right]$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)$$

10. Dada a função $H(x,y) = f(ax + by) + g(ax - by)$, determine o quociente

$$Q = \frac{\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x,y)}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y)}$$

    Sugestão: Considere $H = f(t) + g(w)$ em que $t = ax + by$ e $w = ax - by$.

11. Sejam g e h funções de classe C^2 e c uma constante real não nula. Prove que a função $f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct)$ é uma solução da equação (equação de ondas unidimensional)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

10 Diferenciais de Ordem Superior

- Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ um ponto interior a D_f. Se f é de classe C^2, define-se o **diferencial de segunda ordem** (ou **segundo diferencial**) de f no ponto (a,b) para os acréscimos dx e dy das variáveis x e y, que se denota por $d^2 f(a,b)$, como o diferencial do diferencial de primeira ordem,

$$\begin{aligned} d^2 f(a,b) &= d[df(a,b)] = dx \cdot \frac{\partial(df)}{\partial x}(a,b) + dy \cdot \frac{\partial(df)}{\partial y}(a,b) \\ &\underset{\text{T. S.}}{=} dx^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2 \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ &\quad + dy^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b). \end{aligned}$$

Se f é de classe C^3, o **diferencial de terceira ordem** (ou **terceiro diferencial**) **de** f **no ponto** (a,b) para os acréscimos dx e dy das variáveis x e y, que se denota por $d^3 f(a,b)$,é o diferencial do diferencial de segunda ordem,

$$\begin{aligned} d^3 f(a,b) &= d\left[d^2 f(a,b)\right] = dx \cdot \frac{\partial\left(d^2 f\right)}{\partial x}(a,b) + dy \cdot \frac{\partial\left(d^2 f\right)}{\partial y}(a,b) \\ &\underset{\text{T. Schwartz}}{=} dx^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b) + 3 \cdot dx^2 \cdot dy \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b) \\ &+3 \cdot dx \cdot dy^2 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b) + dy^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b). \end{aligned}$$

Analogamente, se f é de classe C^k, o **diferencial de ordem** k **(ou** k**-ésimo diferencial) de** f **no ponto** (a,b) define-se como

$$d^k f(a,b) = d\left[d^{k-1} f(a,b)\right].$$

As expressões obtidas contam com a igualdade entre as derivadas mistas envolvidas, garantida pelo Teorema de Schwartz, desde que seja preservado o número de vezes que se deriva em ordem a cada uma das variáveis.

10.1 Exercícios Propostos

1. Dada a função $z(x,y) = x^2y + x + \exp(x)$, determine a expressão do diferencial de 2^a ordem d^2z.

2. Seja f a função real definida por $f(x,y) = x^2y - 3y$. Determine a expressão geral dos diferenciais de segunda e terceira ordens de f.

3. Considere a função $f(x,y) = x\cos(y) + y\sin(x)$. Determine a expressão do diferencial de 3^a ordem d^3f.

4. Seja f a função $f(x,y) = \dfrac{1}{y}\cos\left(x^2\right)$, para $y \neq 0$. Sabendo que
$$df(x,y) = -\frac{2x}{y}\sin\left(x^2\right)dx - \frac{1}{y^2}\cos\left(x^2\right)dy,$$
calcule o diferencial de 1^a ordem de $df(x,y)$ no ponto $(0,1)$ para $dx = 0.01$ e $dy = -0.2$. Interprete teoricamente o resultado.

5. Dada a função $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$, calcule o diferencial de 2^a ordem $d^2f(0,0,0)$.

6. Determine o diferencial de 2^a ordem d^2z para $z = f(u,v)$ em que $u = ax$ e $v = by$.

7. Considere a função $F = \varphi(t)$ em que $t = x^2 + y^2$. Determine a expressão do diferencial de 2^a ordem d^2F.

8. Calcule $d^2f(1,2)$ para a função
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln(x) - 10\ln(y).$$

9. Determine o diferencial d^2f da função $f = u + v$ em que $u = \dfrac{x}{y}$ e $v = xy$.

10. Determine a expressão de d^2f sendo f a função definida para $xy \neq 1$ por
$$f(x,y) = \frac{x}{1-xy}.$$

11. Determine $d^2 f$ para a função f definida para $y \neq 0$ por

$$f(x,y) = \tan \frac{x}{y}.$$

12. Determine o diferencial de 3^a ordem $d^3 f$ para a função

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy).$$

13. Determine o diferencial de 2^a ordem de cada uma das funções

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \quad \text{e} \quad g(x,y) = \exp \frac{x}{y}.$$

14. Determine $d^2 f$ para a função $f(x,y,z) = x^2 y^3 z$.

15. Considere a função

$$df(x,y) = x^y dx + \ln^2(xy) dy.$$

Calcule o seu diferencial de primeira ordem no ponto $P(1,1)$ para $dx = 0.01$ e $dy = -0.2$, e interprete teoricamente o resultado.

11 Determinantes Funcionais: Jacobiano e Hessiano

- O conceito de vector gradiente generaliza-se a funções vectoriais como segue.

  Sejam $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $m \geq 2$, uma função vectorial de n variáveis reais definida por m funções componentes $f_1, \ldots, f_m$ reais de n variáveis reais, e $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto interior a $D_{\mathbf{f}}$. Se todas as derivadas parciais de primeira ordem das funções componentes $f_1, \ldots, f_m$ no ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ existem e são finitas, define-se a **Jacobiana** (ou **matriz de Jacobi**) **de f no ponto** $(a_1, \ldots, a_n)$, que se denota por $\mathbf{Jf}(a_1, \ldots, a_n)$, como sendo a matriz $m \times n$ dessas derivadas,

$$\boxed{\mathbf{Jf}(a_1,\ldots,a_n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1,\ldots,a_n) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a_1,\ldots,a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a_1,\ldots,a_n) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a_1,\ldots,a_n) \end{bmatrix}_{m\times n}},$$

que se resume como

$$\mathbf{Jf}\left(a_1,\ldots,a_n\right)=\left[\frac{\partial\left(f_1,\ldots,f_m\right)}{\partial\left(x_1,\ldots,x_n\right)}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right]_{m\times n}.$$

Se a matriz for quadrada, o seu determinante designa-se por **Jacobiano de f no ponto** $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$.

O elemento genérico da matriz Jacobiana $\mathbf{Jf}\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ é

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}.$$

Na linha i estão as sucessivas derivadas parciais de primeira ordem da função componente f_i, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ para $j=1,\ldots,n$. Na coluna j estão as derivadas parciais em ordem a x_j das sucessivas funções componentes $f_1,\ldots,f_m$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ para $i=1,\ldots,m$.

Se $m=1$ a matriz Jacobiana tem uma única linha: é uma matriz linha (de tipo $1\times n$) cuja matriz transposta é o vector gradiente de $f:D_f\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ no ponto $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ (ponto interior a D_f)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}\,f}\left(a_1,\ldots,a_n\right)&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a_1,\ldots,a_n\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\cdot\overrightarrow{e_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\cdot\overrightarrow{e_n}.\end{aligned}$$

- Sejam $f:D_f\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função real de n variáveis reais e $\left(a_1,\ldots,a_n\right)\in\mathbb{R}^n$ um ponto interior a D_f. Define-se a **matriz Hessiana de f no ponto** $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ como sendo a matriz quadrada

$$\boxed{\mathbf{H}f\left(a_1,\ldots,a_n\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(a_1,\ldots,a_n\right)&\cdots&\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\\\vdots&\ddots&\vdots\\\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}\left(a_1,\ldots,a_n\right)&\cdots&\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\end{bmatrix}_{n\times n}}.$$

O determinante de $\mathbf{H}f\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ designa-se por **Hessiano de f no ponto** $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$.

O elemento genérico da matriz Hessiana $\mathbf{H}f\,(a_1,\ldots,a_n)$ é

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a_1,\ldots,a_n)\right)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}.$$

Na linha i estão as sucessivas derivadas parciais de segunda ordem da função f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a_1,\ldots,a_n)$ para $j=1,\ldots,n$. Na coluna j estão as derivadas parciais de segunda ordem em ordem a x_j da função f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,(a_1,\ldots,a_n)$ para $i=1,\ldots,n$.

- O Teorema de Schwartz é ainda válido para funções reais $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de n variáveis reais com $n \geq 3$.

  Teorema de Schwartz generalizado. Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis reais e $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto interior a D_f. Se existem e são contínuas todas as derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de f nos pontos $(x_1,\ldots,x_n)$ de uma bola aberta centrada em $(a_1,\ldots,a_n)$ e todas as derivadas parciais de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, excepto uma, são contínuas no ponto $(a_1,\ldots,a_n)$ então a restante derivada mista também é contínua nesse ponto e a ordem pela qual essas derivadas são calculadas é arbitrária, ou seja,

  $$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,(a_1,\ldots,a_n)}$$

  para todo o $i,j=1,\ldots,n$, com $i \neq j$.

  Se f é de classe C^2 num conjunto aberto A contido em D_f então

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,(a_1,\ldots,a_n)$$

  para todo o $i,j=1,\ldots,n$, com $i \neq j$, sempre que o ponto $(a_1,\ldots,a_n)$ pertença a A. Como tal, se f é de classe C^2 num conjunto aberto A contido em D_f então a matriz Hessiana $\mathbf{H}f\,(a_1,\ldots,a_n)$ é uma matriz simétrica, sempre que o ponto $(a_1,\ldots,a_n)$ pertença a A.

11.1 Exercícios Propostos

1. Determine a matriz Jacobiana e o Jacobiano da função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x,y)=\left(x^2+2y^3,4x+y^2\right).$$

2. Determine a matriz Jacobiana e o Jacobiano da função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por
$$\begin{cases} f_1(x,y)=x^2+3y^2 \\ \\ f_2(x,y)=2x+3 \end{cases}.$$

3. Determine a matriz Jacobiana e, sempre que possível, o Jacobiano das funções:

   (a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(u,v,w)$ dados por
   $$\begin{cases} u=x^2+y-z \\ v=xyz^2 \\ w=2xy-y^2z \end{cases};$$

   (b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y)=(r,s,t)$ dados por
   $$r=xy \quad \wedge \quad s=2x \quad \wedge \quad t=-y$$

   (c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ tal que
   $$f(x,y)=(x+2y,-x,2x,-y);$$

   (d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que
   $$\begin{cases} r=u-w+3z \\ s=-u+2v+z \\ t=v+w+2z \end{cases};$$

   (e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que
   $$x=\rho\cos\theta \quad \text{e} \quad y=\rho\sin\theta$$
   (ρ e θ dizem-se as coordenadas polares);

(f) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\rho,\theta,z) = (x,y,z)$ em que

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

(ρ, θ e z dizem-se as coordenadas cilíndricas);

(g) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} x = 2u + \beta v + w \\ y = u + (\beta+2)\,v + 2w \\ z = v + 2\beta w \end{cases} ;$$

(h) Determine β na alínea anterior de modo a que o respectivo Jacobiano seja nulo.

4. Determine a matriz Jacobiana e o Jacobiano da função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 \end{cases} .$$

5. Seja f a função dada por

$$f(s,t) = \begin{cases} w_1 = \dfrac{2t-6}{2s^2+2} \\ w_2 = \dfrac{\frac{s-4}{2}}{t+1} \end{cases} .$$

Calcule o Jacobiano de f.

6. Calcule a matriz Hessiana e o Hessiano das funções:

(a) $z = x\sin(y) + \sin(x)$;

(b) $z = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$;

(c) $z = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$;

(d) $z = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$;

(e) $z = \exp(2x) + \exp(-y) - 2x - 2\exp(w) + y$.

12 Soluções dos Exercícios Propostos

12.1 Domínios de Definição

1. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 2 - 3x\}$
   (b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (c) $D_f = \mathbb{R}^2$
   (d) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
   (e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}$
   (f) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge y > x^2\right\}$
   (g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x - 1 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge y \geq 0\}$
   (h) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x + 4 \ \wedge \ y > \dfrac{3}{x}, x \neq 0\right\}$
   (i) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$
   (j) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
   (k) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leq -2 \ \wedge \ -2 \leq y \leq 2)\}$
   $\cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2 \ \wedge \ -2 \leq y \leq 2\}$
   (l) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1\}$
   (m) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
   (n) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sqrt{x} \ \wedge \ x \geq 0\}$
   (o) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
   (p) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -|x| \leq y \leq |x|\} \setminus \{(0,0)\}$
   (q) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$
   (r) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(y \geq -x \ \wedge \ y < x^2\right) \vee \left(y \leq -x \ \wedge \ y > x^2\right)\}$
   (s) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
   (t) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

3. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 1 - x\}$
   (b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
   (c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(y > x^2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \geq 4\right) \ \vee \ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \sqrt[3]{2}x\} \cup \{(0,0)\}$

(e) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = -x \ \wedge \ x \leq 0\}$,
ou ainda, $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\big\}$

(f) $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 3y^2\big\} \cup \{(0,0)\,,(3,1)\}$

(g) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\left\{(x,y) \mid y = \dfrac{1}{2}\right\} \cup \{(0,0)\}\right)$,

ou ainda, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \dfrac{1}{2}\right\} \setminus \{(0,0)\}$

(h) $D_f = \big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = -x\}\big) \cup \{(0,0)\}$,
ou ainda, $D = \{(x,y) \mid y \neq -x\} \cup \{(0,0)\}$

4. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \,]0,1] \ \wedge \ y > \dfrac{1}{x}\right\}$

2. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \dfrac{1}{x} \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 \leq 9 \ \wedge \ x \neq 0\right\}$

5. $D_f = \mathbb{R}^2$

6. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -3x\big\} \cup \{(0,0)\}$

(c) $D_f = \mathbb{R}^2$

(d) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}x\right\} \cup \{(0,0)\}$

12.2 Limites e Continuidade

1. É contínua se $\beta = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. $\dfrac{3}{2}$

3. 0

4. Não existe limite em $(0,0)$

5. Não tem limite em $(0,0)$

6. f é contínua

7. É contínua em $(0,0)$

8. É contínua em pontos do eixo dos xx com abcissa positiva

9. É contínua para $\alpha = 0$

10. É contínua na origem

11. É descontínua na origem

12. Obtemos $|f(x,y) - 0| \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n-1} + \dfrac{|p| \cdot}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde se conclui o pretendido

13. É descontínua em $(0,0)$ pois não existe o limite em $(0,0)$

14. É contínua em $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -3\right\} \setminus \{(0,0)\}$

15. É contínua em $(0,0)$

16. É prolongável por continuidade no ponto $(0,0)$ pois existe com valor finito (a saber, valor nulo) o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

17. É contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

18. É contínua

19. Não existe o limite em $(0,0)$ (note que $|y + x\sin x| \leq |y| + |x \sin x| \leq |y| + |x|\,|x|$)

12.3 Derivadas e Diferenciais de 1^a Ordem

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1 \quad$ e $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \dfrac{6}{25}$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \dfrac{1}{2} \quad$ e $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 0$

3. Pela definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = +\infty \quad$ e $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = +\infty$

4. Pela definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad$ e $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

5. Pela definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,-2) = -\infty$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,-2) = +\infty$

6. 0 (pela definição)

7. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\exp(xy)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\exp(xy)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

8. (a) $df\,(x,y) = 2xydx + \left(x^2 - 3\right)dy$

   (b) $\Delta f\,(4,3) = 0.018702$; $\quad df\,(4,3) = 0.02$

   (c) $f\,(1.03, 1.99) = f\,(1,2) + df\,(1,2) = -3.86$

9. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{3x^4 + y^4}{x^2 y}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x^4 + 3y^4}{xy^2}$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\exp(x - 5y^2)}{2\sqrt{\exp(x-5y^2) - y^2}},$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{5\left[\exp(x-5y^2) + 1\right]y}{\sqrt{\exp(x-5y^2) - y^2}}$

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\cot\dfrac{x+\alpha}{\sqrt{y}}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x+\alpha}{2y\sqrt{y}}\cot\dfrac{x+\alpha}{\sqrt{y}}$

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = y\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y^2}{x}\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = x\tan\dfrac{y}{x} + y\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$, que verificam a igualdade pretendida

11. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 - x^2y^2}{\left(x^4 + y^2\right)^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

12. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4xy^2 + 2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$; não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

13. (a) $df\,(2,2) = 1.4$
    (b) $df\,(x,y) = (\sin(ax) + ax\cos(ax))\,dx + (-\cos(by) + by\sin(by))\,dy$
    (c) $dz\,(x,y) = \dfrac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x\tan\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x}dx + dy\right)$
    (d) $dz\,(3,1) = -0.8$
    (e) $dz\,(x,y) = \exp(x-2y)\,[y\,(1+x)\,dx + x\,(1-2y)\,dz]$
    (f) $dz\,(x,y) = \sin(2x)\,dx - \sin(2y)\,dy$

14. $df\,(1,1) = 0.01$; tal significa que $\triangle f = f\,(1+0.01, 1-0.2) - f\,(1,1) \simeq 0.01$

15. $df\,(1,2) = -0.00\,(6)$; $\triangle f\,(1,2) = -0.0056686$

16. $f\,(32.1, 1.2) \simeq 2.00375$

12.4 Diferencialidade

1. Não é diferenciável em $(0,0)$

2. Não existem as derivadas parciais de f em $(0,0)$ logo a função não é diferenciável neste ponto

3. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$
   (b) Se $\alpha \neq 0$ então f não é diferenciável em $(0,0)$ por não ser contínua nesse ponto (ver exercício da secção 2.1); se $\alpha = 0$ então f não é diferenciável em $(0,0)$ pela definição
   (c) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4 + 6x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^2x^2 - y^4 - 4x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. (a) É descontínua em $(0,0)$

   (b) Não é diferenciável na origem por ser descontínua na origem

5. (a) Pela definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-\infty$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0$

   (b) Não é diferenciável na origem por ser descontínua nesse ponto (ver exercício da secção 2.1)

6. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\infty$ logo a função f não é diferenciável no ponto $(2,1)$

7. (a) $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. O derivado de D é $\mathbb{R}^2$, portanto D é um conjunto aberto e fechado

   (b) $f(0,0)=\beta$

   (c) É diferenciável na origem

8. (a) Pela definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

   (b) É diferenciável se $n\geq 3$ e $p=0$

12.5 Regra de Derivação da Função Composta

1. $f'(t)=2\left[1+tg^2\left(x^2+y^2\right)\right]\left[x\left(2t-3\right)+\dfrac{y}{t}\right]$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\dfrac{2u^2+2u-2}{(1+u)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\dfrac{2u^2+2u-2}{(1+u)^2}$ para $u(x,u)=\sqrt{x^2+y^2}$

3. $f'(s)=(2Ax+2By)(2vs+u)+(2Bx+2Cy)\left(\dfrac{2s}{u}-\dfrac{1}{2\sqrt{v}}\right)$

4. Tomando $u=x-y, v=y-z$ e $t=z-x$, temos $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}=-\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial t}$, que verificam a igualdade requerida

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(u+v)^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(u+v)^2}}$ sendo $u=xy^2$ e $v=x^2y$

6. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial z}{\partial u} + y\exp(xy)\dfrac{\partial z}{\partial v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y\dfrac{\partial z}{\partial u} + x\exp(xy)\dfrac{\partial z}{\partial v}$

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xyf'\left(x^2-y^2\right)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f\left(x^2-y^2\right) - 2y^2f'(x^2-y^2)$, que verificam a igualdade requerida

8. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^{\alpha-1}g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

9. $\dfrac{dU}{dw} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{dt}{dw} + \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial w} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dw} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dw} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t}\dfrac{dt}{dw}$

10. Tomando $u = \dfrac{x}{y}$ e $v = \dfrac{t}{x}$, temos $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xg\left(u,v\right) + x^2\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{1}{y} - \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{t}{x^2}\right)$

12.6 Derivada Direccional e Dirigida

1. (a) $f'_{(1,-1)}\left(0,0\right) = 3$

   (b) $f'_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\left(0,0\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

2. $f'_{(1,2)}\left(0,0\right) = 0$

3. (a) $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\left(0,1\right) = \left(0,0\right)$

   (b) $f'_{\overrightarrow{v}}\left(0,1\right) = 0$

4. $f'_{(a,b)}\left(0,0\right) = \dfrac{b^2}{a}$

5. (a) $\dfrac{3\sqrt{3}+1}{2}$

   (b) $\dfrac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$

6. Trata-se de $f'_{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}\left(2,1\right)$ [segundo o versor do vector $(3,5)$] e tem valor $\dfrac{47}{5}$

7. (a) $2\sqrt{2x}$

   (b) $2r$ na direcção do raio; 0 na direcção da recta tangente

8. (a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(2,2) = (2,-2)$

   (b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(-1,0) = (0,0)$

9. A derivada é máxima na direcção e sentido do vector gradiente e tem o valor $\sqrt{e^2+1}$

10. (a) Na direcção do vector $\overrightarrow{v} = (0,1)$

    (b) $\dfrac{dg}{dx}(x) = \sin(2x) + 2x$ e a função trigonométrica $\sin(2x)$ tem derivadas contínuas de todas as ordens

11. Na direcção do vector $\overrightarrow{u} = (1,0)$

12.7 Função Homogénea

1. (a) 0

   (b) 0

   (c) 1

   (d) 1

   (e) $-\dfrac{1}{2}$

   (f) $-\dfrac{1}{2}$

2. É homogénea de grau 2; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\ln\dfrac{x}{y} - y$, que verificam a Identidade de Euler $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot f(x,y)$

3. (a) É válida a Identidade de Euler

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = \alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta}$ é homogénea de grau $\alpha+\beta-1$

4. (a) $\alpha = 3$

5. (a) $a = 6$ e $b = 9$

   (b) 3

6. (a) f é homogénea de grau 0
   (b) $f'_{\overrightarrow{v}}(1,1) = 0$
   (c) $\overrightarrow{\text{grad}\, f}\,(1,1) = (e+1, -e-1)$
7. (a) A igualdade é segue de g ser homogénea de grau n
   (b) Tomando $u = y/x$ e $v = z/x$, obtemos
   $\dfrac{\partial g}{\partial x} = nx^{n-1}f - x^{n-2}y\dfrac{\partial f}{\partial u} - x^{n-2}z\dfrac{\partial f}{\partial v}, \qquad \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^{n-1}\dfrac{\partial f}{\partial u}$
   e $\quad \dfrac{\partial g}{\partial z} = x^{n-1}\dfrac{\partial f}{\partial v}$, que verificam a igualdade pretendida
8. (a) Para todo o γ $(\forall \gamma \in \mathbb{R})$, $\alpha = 2 - \gamma$ e $\beta = \gamma$; o grau de homogeneidade é α
9. É homogénea se $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ e $\beta = \dfrac{13}{2}$
10. É homogénea se $\alpha = -\dfrac{5}{2}$ e $\beta = -1$
11. Para todo o α $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$, $\beta = 1 - \alpha$ e $\gamma = 3 + \alpha$
12. É homogénea de grau 2 (Identidade de Euler)
13. (a) 3
    (b) Como g é homogénea de grau 3 as suas derivadas de 1ª ordem são homogéneas de grau 2.
14. $f\left(\dfrac{xt}{yt}\right) = f\left(\dfrac{x}{y}\right) = t^o f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ logo f é homogénea de grau 0. Tomando $u = \dfrac{x}{y}$ temos

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{y} + y\frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

15. (a) 2
16. Sendo f uma função homogénea de grau 0 é válida a Identidade de Euler $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, logo $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

17. f é homogénea de grau $\alpha = -1$ e g é homogénea de grau 0. Logo verifica-se a Identidade de Euler

18. $k = 0$; grau 2

19. f é homogénea para $a = 10$ e $b = 6$; grau 4

20. (a) $k = 1$; grau 2

    (b) As derivadas parciais de primeira ordem são homogéneas de grau 1

21. (a) Sim, de grau 0

    (b) Para iguais variações das variáveis independentes x e y, a variável dependente z mantém-se constante

22. É homogénea de grau 3 (Identidade de Euler)

23. (a) A relação pretendida é a Identidade de Euler correspondente à função

    (b) É homogénea de grau $u + v$

24. 1

25. f não é homogénea para $\{(x, y) : x \neq 3y\}$

26. (a) 2

27. (a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^a > 0 \wedge y \neq 0\}$
    (b) $a = 16$ e $b = 4$; grau 3

28. $k = 1$; grau 3

29. (a) 1

30. É homogénea de grau n, logo a igualdade dada é a Identidade de Euler correspondente

31. A função g é homogénea de grau 2

32. Sim, de grau n

33. (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 3x^2\dfrac{\partial z}{\partial u} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial v} = 20$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,1) = x^2\dfrac{\partial z}{\partial v} = 8$

    (b) $f(8, 4) = 8$

    (c) -20; é uma derivada dirigida

12.8 Derivadas Parciais de Ordem Superior

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, que verificam a igualdade pretendida

2. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \lim_{k\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y+k) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{k} = 4x$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0$, onde as derivadas de 1^a ordem são $\dfrac{\partial f}{\partial x}(h,0) = \cos h$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

4. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = 2y\exp(x) + 6y^2$ e $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}(x,y) = y^2\exp(x)$

5. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2}(\exp(x) + \sin x)$

   e $\dfrac{\partial^3 g}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2}(\exp(x) + \cos x)$

6. Pela definição, obtemos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

7. (a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)-1}{\ln^2(x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2<1 \text{ e } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)-1}{\ln^2(x^2+y^2)} & \text{se } x^2+y^2<1 \text{ e } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ &= \begin{cases} \dfrac{4xy\left(2-\ln\left(x^2+y^2\right)\right)}{(x^2+y^2)\ln^3(x^2+y^2)} & \text{se } \begin{array}{c} x^2+y^2<1 \\ \text{e } (x,y)\neq(0,0) \end{array} \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

(b) f é diferenciável no ponto $(0,0)$

8. Temos $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2\dfrac{xy^2}{x+y} - \dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}$,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 2\frac{y^2}{x+y} - 4\frac{xy^2}{(x+y)^2} + 2\frac{x^2y^2}{(x+y)^3}$$

e $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = 4\dfrac{xy}{x+y} - 2\dfrac{xy^2}{(x+y)^2} - 2\dfrac{x^2y}{(x+y)^2} + 2\dfrac{x^2y^2}{(x+y)^3}$, que verificam a igualdade pretendida.

9. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{(1+x)^m m^2 (1+y)^n}{(1+x)^2} - \dfrac{(1+x)^m m (1+y)^n}{(1+x)^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(1+x)^m n^2 (1+y)^n}{(1+y)^2} - \frac{(1+x)^m n (1+y)^n}{(1+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{(1+x)^m mn (1+y)^n}{(1+x)(1+y)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

10.

a. São necessárias as derivadas (calculadas pela definição) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,h) = -h$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(k,0) = k$ para chegar às derivadas de 2^a ordem pretendidas

b. Não se verifica a continuidade da função $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na origem

11. $F''_{xy}(0,0) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ e $F''_{yx}(0,0) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$; a derivada mista F''_{xy} não é contínua na origem, logo o Teorema de Schwart não se aplica

12. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$

13. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = -\dfrac{a^2}{a-b} - \dfrac{a^3}{(a-b)^2}$ para $(a,b) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\right\}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$

14.

a. grau 2 se $\delta = 2$ e $\epsilon = 3$

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é homogénea de grau 1 e verifica a Identidade de Euler

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

15. Verifica-se a igualdade pretendida dado que $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ é homogénea de grau $(u + v - 1)$

16.

a. As derivadas parciais de 2^a ordem são homogéneas de grau 1, logo a função f é homogénea de grau 3

b. $f(x, y) = \dfrac{1}{3}\left(x^3 + 3x^2y + y^3\right)$

17. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x^2 + 4xy$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 2y^2$

12.9 Derivação da Função Composta para Ordens Superiores

1. $\dfrac{d^2 f}{dt^2}(t) = 2 + 2\tan\left(t^2\right) - \dfrac{\left[1 + \tan\left(t^2\right)\right]^2}{\tan\left(t^2\right)}$

2. $\dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} = 12u^2 - 4v^2 + 16,$ $\dfrac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = -8uv$ e $\dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 12v^2 - 4u^2 - 16$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = yg(0, y),$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = xg(x, 0),$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = g(0, 0)$
   e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = g(0, 0)$

4. Tomando $u = \dfrac{y}{x}$ obtemos

   (a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}h''$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y^2}{x^3}g'' + \dfrac{2y}{x^3}h' + \dfrac{y^2}{x^4}h''$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{y}{x^2}g'' - \dfrac{1}{x^2}g' - \dfrac{y}{x^3}h''$, que verificam a igualdade pretendida

5. Tomando $u = ax - by$ e $v = x + y^2$ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + y\varphi + xy\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}a + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + x\varphi + xy\left(-b\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{y^2} + \varphi + (ax - by)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(x + 2y^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v} - abxy\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \\ &\quad + \left(2axy^2 - bxy\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + 2xy^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\end{aligned}$$

6. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

7. $\dfrac{d^2 f}{dt^2}(t) = 2\cos(t)\left[\cos^2(t) - \sin^2(t)\right] - 2\sin^2(2t)$

8. $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f''(x + \varphi(y))$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(x + \varphi(y))\varphi'(y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(x + \varphi(y))\varphi'(y)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x + \varphi(y))$, que satisfazem a igualdade pretendida

10. $Q = \dfrac{b^2}{a^2}$

11. Análogo ao exercício anterior

12.10 Diferenciais de Ordem Superior

1. $d^2 z(x, y) = (2y + \exp x)dx^2 + 4xdxdy$

2. $d^2 f(x, y) = 2ydx^2 + 4xdxdy$ e $d^3 f(x, y) = 6dx^2dy$

3. $d^3f\,(x,y) = -y\cos(x)\,dx^3 + 3(-\sin x)dx^2dy + 3(-\cos y)dxdy^2$

$+x\sin(y)\,dy^3$

4. $d^2f\,(0,1) = 0.08$

5. $d^2f(0,0,0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy + 8dxdz + 4dydz$

6. $d^2z\,(x,y) = \dfrac{d^2f}{du^2}a^2dx^2 + 2\dfrac{d^2f}{dudv}abdxdy + \dfrac{d^2f}{dv^2}b^2dy^2$

7. $d^2F\,(x,y) = \left(4x^2\varphi'' + 2\varphi'\right)dx^2 + 8xy\varphi''dxdy + \left(4y^2\varphi'' + 2\varphi'\right)dy^2$

8. $d^2f(1,2) = 6dx^2 + 2dxdy + \dfrac{9}{2}dy^2$

9. $d^2f(x,y) = 2\left(1 - \dfrac{1}{y^2}\right)dxdy + \dfrac{2x}{y^3}dy^2$

10. $d^2f\,(x,y) = \dfrac{2y}{(1-xy)^3}dx^2 + \dfrac{4y}{(1-xy)^3}dxdy + \dfrac{2x^3}{(1-xy)^3}dy^2$

11. $d^2f\,(x,y) = \dfrac{2\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)\left[1+\tan^2\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]}{y^2}dx^2$

$-\dfrac{2\left[1+\tan^2\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]\left(y + 2x\tan\dfrac{x}{y}\right)}{y^3}dxdy$

$+\dfrac{2x\left(y + x\tan\dfrac{x}{y}\right)\left[1+\tan^2\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]}{y^4}dy^2$

12. $d^3f(x,y) = \left[-y^5\cos(xy)\right]dx^3 + 3\left[-4y^3\sin(xy) - y^4x\cos(xy)\right]dx^2dy$

$+3\left[6y\cos(xy) - 6xy^2\sin(xy) - x^2y^3\cos(xy)\right]dxdy^2$

$+\left[6x\cos(xy) - 6yx^2\sin(xy) - y^2x^3\cos(xy)\right]dy^3$

13. $d^2f\,(x,y) = \dfrac{2\left(y^2-x^2\right)}{(x^2+y^2)^2}dx^2 - \dfrac{8xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \dfrac{2\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}dy^2$

e $d^2g\,(x,y) = \dfrac{\exp\dfrac{x}{y}}{y^2}dx^2 - \dfrac{2(x+y)\exp\dfrac{x}{y}}{y^3}dxdy + \dfrac{x(2y+x)\exp\dfrac{x}{y}}{y^4}dy^2$

14. $d^2f(x,y,z) = 2y^3zdx^2 + 6x^2yzdy^2 + 12xy^2zdxdy + 4xy^3dxdz + 6x^2y^2dydz$

15. $d^2f(1,1) = 0.0001$

12.11 Determinantes Funcionais

1. $Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 6y^2 \\ 4 & 2y \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $|\,Jf(x,y)\,| = 4xy - 24y^2$

2. $Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 6y \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $|\,Jf(x,y)\,| = 12y$

3. (a) $Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & -1 \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ 2y & 2x-2yz & -y^2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

   e $|\,Jf(x,y,z)\,| = 6x^2y^2z^2 - 8x^3yz + y^3z^2 + 4xy^2z + 2y^2z^3$

   (b) $Jf(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

   (c) $Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{4\times 2}$

   (d) $Jf(u,v,w,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

   (e) $Jf(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $|\,Jf(\rho,\theta)\,| = \rho$

   (f) $Jf(\rho,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $|\,Jf(\rho,\theta,z)\,| = \rho$

(g) $Jf\left(u,v,w\right)=\begin{bmatrix} 2 & \beta & 1 \\ 1 & \beta+2 & 2 \\ 0 & 1 & 2\beta \end{bmatrix}_{3\times 3}$

e $\mid Jf\left(u,v,w\right) \mid = 2\beta^2+8\beta-3$

(h) $\beta=\dfrac{-4\pm\sqrt{22}}{2}$

4. $Jf\left(x_1,x_2\right)=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8x_1+12x_2 & 12x_1+18x_2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

e $\mid Jf\left(x_1,x_2\right) \mid = -12x_1-18x_2$

5. $\left|Jf\left(s,t\right)\right|=\dfrac{1}{\left(t+1\right)\left(2s^2+2\right)}-\dfrac{2s\left(2t-6\right)\left(s-4\right)}{\left(t+1\right)^2\left(2s^2+2\right)^2}$

6. (a) $H\left(x,y\right)=\begin{bmatrix} -y\sin x & \cos\left(x\right)+\cos y \\ \cos\left(x\right)+\cos y & -x\sin y \end{bmatrix}_{2\times 2}$

e $\mid H\left(x,y\right) \mid = xy\sin\left(x\right)\sin y-\left[\cos\left(x\right)+\cos y\right]^2$

(b) $H\left(x_1,x_2,x_3\right)=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $\mid H\left(x_1,x_2,x_3\right) \mid = 54$

(c) $H\left(x_1,x_2,x_3\right)=\begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

e $\mid H\left(x_1,x_2,x_3\right) \mid = -72x_1+18$

(d) $H\left(x_1,x_2,x_3\right)=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $\mid H\left(x_1,x_2,x_3\right) \mid = 4$

(e) $H(x,y,w)=\begin{bmatrix} 4\exp(2x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-y) & 0 \\ 0 & 0 & -2\exp w \end{bmatrix}_{3\times 3}$

e $\mid H(x,y,w) \mid = -8\exp(2x-y+w)$