Resolução 2^o Trabalho de Análise Matemática I
ETI/LEI (02 de Dezembro de 2010)

Diana A. Mendes

$\boxed{\textbf{1a).}}$

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+e^x)\,dx &= \int_0^2 (x)\,dx + \int_0^2 (e^x)\,dx = \left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2 + \left.(e^x)\right|_0^2 = \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + \left(e^2 - e^0\right) = 2 + e^2 - 1 = 1 + e^2\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1b).}}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+4x+5}\right) dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+4x+4+1}\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(x+2)^2}\right) dx \\ &= \left.(\arctan(x+2))\right|_0^1 = \arctan 3 - \arctan 2\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1c).}}$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{1}{x+x^3}\right) dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x(1+x^2)}\right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{-x}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \left.(\ln|x|)\right|_1^2 - \left.\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right)\right|_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5\end{aligned}$$

C.A. (função racional própria)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\left(1+x^2\right)}\\ &= \frac{x^2\left(A+B\right)+Cx+A}{x\left(1+x^2\right)}\\ &\rightarrow \left\{\begin{array}{c} A+B=0\\ C=0\\ A=1\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} B=-1\\ C=0\\ A=1\end{array}\right.\end{aligned}$$

Portanto temos a seguinte decomposição em fracções simples

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{x}+\frac{-x}{1+x^2}$$

$\boxed{\textbf{1d).}}$

$$\begin{aligned}\int_4^9\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)dx &= \left(x+2\sqrt{x}+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|\right)\Big|_4^9=\\ &= 9+6+2\ln 2-4-4-2\ln 1=7+2\ln 2\end{aligned}$$

C.A.

$$\begin{aligned}\underbrace{P\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}}_{\boxed{\text{Substituição: } \begin{array}{l} t=\sqrt{x}\\ x=t^2\\ x'=2t\end{array}}} &= P\frac{t}{t-1}2t=2P\frac{t^2}{t-1}=\\ &= 2P\frac{t^2-1+1}{t-1}=2P\frac{t^2-1}{t-1}+2P\frac{1}{t-1}\\ &= 2P\frac{\left(t-1\right)\left(t+1\right)}{t-1}+2P\frac{1}{t-1}=2P\left(t+1\right)+2P\frac{1}{t-1}\\ &= 2\frac{t^2}{2}+2t+2\ln\left|t-1\right|=t^2+2t+2\ln\left|t-1\right|\\ &= x+2\sqrt{x}+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1e).}}$

$$\begin{aligned}
\int_{3/4}^{4/3}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx &= \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|\Big|_{3/4}^{4/3} = \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\frac{16}{9}}+\frac{4}{3}\right| - \ln\left|\sqrt{1+\frac{9}{16}}+\frac{3}{4}\right| = \ln 3 - \ln 2
\end{aligned}$$

C.A.

$$\begin{aligned}
\underbrace{P\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}_{\boxed{\begin{array}{ll} & x=\tan t \\ \text{Subst:} & x'=\frac{1}{\cos^2 t} \\ & t=\arctan x\end{array}}} &= P\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 t+1}}\times\frac{1}{\cos^2 t}\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+1}}\times\frac{1}{\cos^2 t}\right) \\
&= P\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\times\frac{1}{\cos^2 t}\right) = P\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos t}}\times\frac{1}{\cos^2 t}\right) = P\frac{1}{\cos t} \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| = \ln\left|\frac{1}{\cos(\arctan x)}+\tan(\arctan x)\right| \\
&= \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1f).}}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}(x\cos x)\,dx &= (x\sin x+\cos x)|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2} - 0\sin 0 - \cos 0 = \pi/2 - 1
\end{aligned}$$

C.A.

$$\underbrace{Px\cos x}_{\boxed{\text{partes}\left\{\begin{array}{c} u'=\cos x \\ v=x\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=\sin x \\ v'=1\end{array}\right.}} = x\sin x - P\sin x = x\sin x+\cos x$$

$\boxed{\textbf{2a).}}$

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}(t+1)\,dt=\left(x^2+1\right)2x-(1+1)\,0=2x^3+2x$$

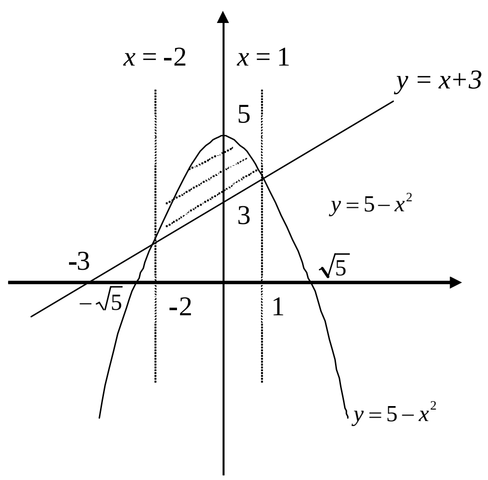
$\boxed{\textbf{2b).}}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{\sin x}\left(e^t\right)dt &= \left(e^{\sin x}\right)\cos x-\left(e^{\cos x}\right)(-\sin x)\\ &= e^{\sin x}\cos x+e^{\cos x}\sin x\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3a).}}$

$$x+3\leq y\leq 5-x^2$$

Representação gráfica:
$y=x+3$ (recta que passa em $x=0, y=3$ e $x=-3, y=0$)
$y=5-x^2$ (parábola que $\cap xx$ em $x=\pm\sqrt{5}$ e $\cap yy$ em $y=5$)
Pontos de intersecção entre os dois gráficos: $x+3=5-x^2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-2$ e $x=1$



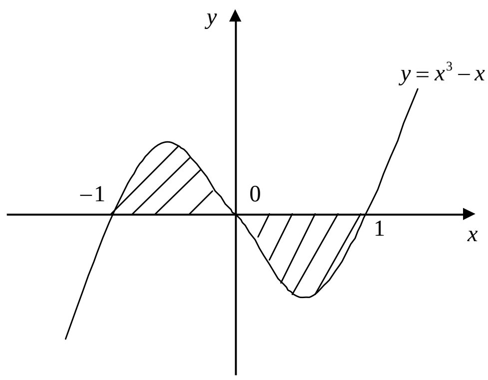
Cálculo da área:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1} \left(\left(5-x^2\right)-(x+3)\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2-x+2\right) dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{1} \\
&= \left(-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2\,(-2)\right)=\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

3b).

$$y = x^3 - x,\ \ y = 0$$

Representação gráfica:
$y = 0$ (eixo dos xx)
$y = x^3 - x$ (cúbica que $\cap xx$ em $x = 0$ e $x = \pm 1$ e $\cap yy$ em $y = 0$)



Cálculo da área:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} \left(x^3-x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(-\left(x^3-x\right)\right) dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4a).}}$

$$\underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx}_{\text{integral impróprio em } x=\pi/2} = \lim_{\varepsilon\to\pi/2} \int_0^{\varepsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to\pi/2} \int_0^{\varepsilon} \cos x \ (1-\sin x)^{-1/2}\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to\pi/2} \left(-\frac{(1-\sin x)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_0^{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to\pi/2} \left(-2\sqrt{1-\sin x}\Big|_0^{\varepsilon} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to\pi/2} \left(-2\sqrt{1-\sin\varepsilon} + 2\sqrt{1-\sin 0} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to\pi/2} \left(-2\sqrt{1-\sin\varepsilon} + 2 \right) = 2 \quad (\text{pois } \sin(\pi/2) = 1)
\end{aligned}$$

Integral impróprio convergente

$\boxed{\textbf{4b).}}$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx}_{\text{integral de limite infinito } x=\pm\infty} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to-\infty} \int_{\varepsilon}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{\varepsilon\to+\infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to-\infty} \left(\arctan x|_{\varepsilon}^{0} \right) + \lim_{\varepsilon\to+\infty} \left(\arctan x|_{0}^{\varepsilon} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to+\infty} (\arctan\varepsilon - \arctan 0) \\
&= \lim_{\varepsilon\to-\infty} (0 - \arctan\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to+\infty} (\arctan\varepsilon - 0) \\
&= \pi/2 + \pi/2 = \pi
\end{aligned}$$

Integral de limite infinito convergente

$\boxed{\textbf{5a).}}$

$$y = \ln x, \ 1 \leq x \leq \sqrt{3}$$

Comprimento de linha:

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \left(\sqrt{1+x^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right|\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} \\
&= \left(2 + \ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|\right) - \left(\sqrt{2} + \ln\left|\sqrt{2}-1\right|\right) \simeq 0.91785
\end{aligned}$$

<u>C.A.</u>

$$\underbrace{P\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}_{x=\tan t} = P\left(\frac{\sqrt{\tan^2 t+1}}{\tan t} \times \frac{1}{\cos^2 t}\right) =$$

Subst: $x' = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

$t = \arctan x$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\frac{\frac{1}{\cos t}}{\tan t} \times \frac{1}{\cos^2 t}\right) = P\left(\frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}} \times \frac{1}{\cos^2 t}\right) = P\frac{1}{\sin t\cos^2 t} \\
&= P\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t} = P\frac{\sin^2 t}{\sin t\cos^2 t} + P\frac{\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t} \\
&= P\frac{\sin t}{\cos^2 t} + P\frac{1}{\sin t} = P\sin t \ (\cos t)^{-2} + P\frac{1}{\sin t} \\
&= -\frac{(\cos t)^{-1}}{-1} + \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| = \frac{1}{\cos t} + \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| \\
&= \frac{1}{\cos(\arctan x)} + \ln\left|\frac{1}{\sin(\arctan x)} - \cot(\arctan x)\right| \\
&= \sqrt{1+x^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right|
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5b).}}$

$$y = 2\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 1$$

Comprimento de linha:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}dx = \int_0^1 \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) dx \\
&= \underbrace{\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) dx}_{\text{integral impróprio em } x=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right| + 2\sqrt{x\,(x+1)}\right)\right)\Bigg|_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| + 2\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon}}\right)}_{0} + \underbrace{2\sqrt{\varepsilon\,(\varepsilon+1)}}_{0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| + 2\sqrt{2}\right) \simeq 2.2956
\end{aligned}$$

Portanto o integral impróprio é convergente e o comprimento de linha é 2.2956

C.A.1

$$\underbrace{P\sqrt{\frac{x+1}{x}}}_{\boxed{\text{Subst: } \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{x+1}{x}} \\ x &= \frac{1}{t^2-1} \\ x' &= -\frac{2t}{(t^2-1)^2} \end{aligned}}} = P\ t\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right) = -2P\frac{t^2}{(t^2-1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -2P\left(\frac{1/4}{t-1}+\frac{1/4}{(t-1)^2}+\frac{-1/4}{t+1}+\frac{1/4}{(t+1)^2}\right) \\
&= -2\left(P\frac{1/4}{t-1}+P\frac{1/4}{(t-1)^2}+P\frac{-1/4}{t+1}+P\frac{1/4}{(t+1)^2}\right) \\
&= -2\left(\frac{1}{4}P\frac{1}{t-1}+\frac{1}{4}P(t-1)^{-2}-\frac{1}{4}P\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}P(t+1)^{-2}\right) \\
&= -2\left(\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4(t-1)}-\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4(t+1)}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right|+\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right)}+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1\right|+\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right|+2\sqrt{x(x+1)}\right)
\end{aligned}$$

C.A.2: função racional própria

$$
\begin{aligned}
\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2} &= \frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \\
&= \frac{A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t+1)(t-1)^2 + D(t-1)^2}{(t-1)^2(t+1)^2} \\
&= \frac{\begin{array}{c} t^3(A+C) + t^2(A+B-C+D) + t(-A+2B-C-2D) \\ +(B-A+C+D) \end{array}}{(t-1)^2(t+1)^2} \\
&\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A+C=0 \\ A+B-C+D=1 \\ A-2B+C+2D=0 \\ -A+B+C+D=0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A=1/4 \\ B=1/4 \\ C=-1/4 \\ D=1/4 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

portanto temos a seguinte decomposição em fracções simples

$$
\frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{1/4}{t-1} + \frac{1/4}{(t-1)^2} + \frac{-1/4}{t+1} + \frac{1/4}{(t+1)^2}
$$

(fim C.A.2) (fim C.A.1)

6a).

$$
\frac{dx}{dy} = \frac{1+x}{1-y}
$$

equação diferencial (1^a ordem) de variáveis separadas

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= \frac{1+x}{1-y} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{1-y}dy \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+x}dx = \int \frac{1}{1-y}dy \\
&\Leftrightarrow \ \ln|1-y| = \ln|1+x| + c, \ c \in \mathbb{R} \quad \text{(solução geral)}
\end{aligned}
$$

6b).

$$
\left(1+x^2\right)y' = (1+y)^2 \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = (1+y)^2 \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)dy = (1+y)^2\,dx
$$

equação diferencial (1^a ordem) de variáveis separadas

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(1+y)^2}dy = \frac{1}{(1+x^2)}dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{(1+y)^2}dy = \int \frac{1}{(1+x^2)}dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int (1+y)^{-2}\,dy = \arctan x + c, c \in \mathbb{R} \\
\frac{-1}{(1+y)} &= \quad \arctan x + c, c \in \mathbb{R} \text{ (solução geral)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6c).}}$

$$y'x - 2y = x^4 \cos\left(x^2\right) \Leftrightarrow y' - 2\frac{y}{x} = x^3 \cos\left(x^2\right)$$

(dividimos por x) e temos uma equação diferencial linear de 1^a ordem

Substituição:

$$y = uv$$

Derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

Obtem-se:

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} - 2uv\frac{1}{x} = x^3 \cos\left(x^2\right)$$

Pôr u em evidência:

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} - 2v\frac{1}{x}\right) = x^3 \cos\left(x^2\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2v\frac{1}{x} = 0 \\ \frac{du}{dx}v = x^3 \cos\left(x^2\right) \end{cases}$$

2 equações dif. de variáveis separadas. Resolvemos a primeira:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} - 2v\frac{1}{x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = 2v\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{v}dv = 2\frac{1}{x}dx \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{v}dv = \int 2\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \ln|v| = 2\ln|x| \\
&\Leftrightarrow \ln|v| = \ln|x|^2 \Leftrightarrow \boxed{v = x^2}
\end{aligned}$$

Resolvemos a segunda equação dif.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}v &= x^3\cos\left(x^2\right) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x^2 = x^3\cos\left(x^2\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = x\cos\left(x^2\right) \Leftrightarrow du = x\cos\left(x^2\right)dx \Leftrightarrow \\
\int du &= \int x\cos\left(x^2\right)dx \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}\underbrace{\int 2x\cos\left(x^2\right)dx}_{Pa'\cos a=\sin a} \\
&\Leftrightarrow \boxed{u = \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right)+c}
\end{aligned}$$

Portanto a solução geral é

$$y = uv = \left(\frac{1}{2}\sin\left(x^2\right)+c\right)x^2, \quad c\in\mathbb{R}$$

6d).

$$\begin{aligned}
(\cos x - x\cos y)\frac{dy}{dx} &= \sin y + y\sin x \\
&\Leftrightarrow (\cos x - x\cos y)\,dy = (\sin y + y\sin x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(\sin y + y\sin x)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(-\cos x + x\cos y)}_{N(x,y)}dy = 0
\end{aligned}$$

Verificar se é uma equação diferencial exacta (total)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = (\sin y + y\sin x)'_y = \cos y + \sin x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = (-\cos x + x\cos y)'_x = \sin x + \cos y \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, conclui-se que a equação dada é exacta.

Procuramos uma solução geral de forma

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= c,\ c\in\mathbb{R}\ \text{ onde} \\
&\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = \sin y + y\sin x & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = -\cos x + x\cos y & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Integrar (1) em relação a variável x

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial F}{\partial x} dx &= \int (\sin y + y \sin x)\, dx \\
F(x, y) &= x \sin y - y \cos x + h(y) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Derivar (3) em ordem a variável y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= (x \sin y - y \cos x + h(y))'_y \\
\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{N(x,y)} &= x \cos y - \cos x + \frac{dh}{dy} \\
N(x, y) &= x \cos y - \cos x + \frac{dh}{dy} \\
-\cos x + x \cos y &= x \cos y - \cos x + \frac{dh}{dy} \to \frac{dh}{dy} = 0
\end{aligned}
$$

Como $\dfrac{dh}{dy} = 0 \ \to h(y) = c,\ c \in \mathbb{R}$ (determinamos a expressão da função $h(y)$).

Logo a solução geral é de forma (substituindo $h(y)$ em (3)):

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= x \sin y - y \cos x + c = 0 \\
&\Leftrightarrow x \sin y - y \cos x = c,\ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

6e).

$$
\begin{aligned}
(x+1)\frac{dy}{dx} - y &= 3x^4 + 3x^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - y\frac{1}{x+1} = \frac{3x^4 + 3x^3}{x+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - y\frac{1}{x+1} = \frac{3x^3(x+1)}{x+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - y\frac{1}{x+1} = 3x^3
\end{aligned}
$$

equação diferencial linear de primeira ordem
Substituição:

$$y = uv$$

Derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

Obtem-se:

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} - uv\frac{1}{x+1} = 3x^3$$

Pôr u em evidência:

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} - v\frac{1}{x+1}\right) = 3x^3 \;\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{1}{x+1} = 0 \\ \dfrac{du}{dx}v = 3x^3 \end{cases}$$

2 equações dif. de variáveis separadas. Resolvemos a primeira:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - v\frac{1}{x+1} &= 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = v\frac{1}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{v}dv = \frac{1}{x+1}dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{v}dv = \int \frac{1}{x+1}dx \\ &\Leftrightarrow \ln|v| = \ln|x+1| \Leftrightarrow \boxed{v = x+1} \end{aligned}$$

Resolvemos a segunda equação dif.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}v &= 3x^3 \Leftrightarrow \frac{du}{dx}(x+1) = 3x^3 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3x^3}{x+1} \\ &\Leftrightarrow du = \frac{3x^3}{x+1}dx \Leftrightarrow \int du = \int \frac{3x^3}{x+1}dx \\ &\Leftrightarrow u = \underbrace{\int \frac{3x^3}{x+1}}_{\text{racional imprópria (dividir)}} dx \Leftrightarrow u = 3\int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &\Leftrightarrow \boxed{u = x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 3x - 3\ln|x+1| + c} \end{aligned}$$

Portanto a solução geral é

$$y = uv = \left(x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 3x - 3\ln|x+1| + c\right)(x+1)\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\textbf{6f).}}$

$$\begin{aligned}
\left(2xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(4x^2y\right)dy &= 0 \Leftrightarrow \\
x\left(2y^2 + \frac{1}{y^2}\right)dx + 4x^2y\ dy &= 0 \Leftrightarrow \left(4x^2\right)(y)\,dy = -x\left(2y^2 + \frac{1}{y^2}\right)dx
\end{aligned}$$

equação diferencial de variáveis separáveis

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{y}{2y^2 + \dfrac{1}{y^2}}\right)dy = -\frac{x}{4x^2}dx \Leftrightarrow \left(\frac{y^3}{2y^4+1}\right)dy = -\frac{1}{4x}dx \\
&\Leftrightarrow \int \left(\frac{y^3}{2y^4+1}\right)dy = -\int \frac{1}{4x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{8}\int \frac{8y^3}{2y^4+1}dy = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{8}\ln\left|2y^4+1\right| = -\frac{1}{4}\ln|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R} \ \ \text{(solução geral)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6g).}}$

$$\left(1+x^2\right)dy + \left(xy + x^3 + x\right)dx = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(xy + x^3 + x\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(1+x^2\right)}_{N(x,y)}dy = 0$$

Verificar se é uma equação diferencial exacta (total)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \left(xy + x^3 + x\right)'_y = x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \left(1 + x^2\right)'_x = 2x \end{cases}$$

como

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

conclui-se que a equação dada não é exacta.

Verificar a existência de um factor integrante de tipo $\boxed{\mu = \mu(x)}$, isto é

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{x - 2x}{1+x^2} = \frac{-x}{1+x^2}$$

como a expressão calculada só depende de x, temos confirmada a existência de um factor integrante de tipo $\mu = \mu(x)$.

Determinar a expressão do factor integrante:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dx} &= \mu\left(\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}\right) \Leftrightarrow \frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{-x}{1+x^2}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}d\mu = \left(\frac{-x}{1+x^2}\right)dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{\mu}d\mu = \int\left(\frac{-x}{1+x^2}\right)dx \\
\ln|\mu| &= -\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \text{ (factor integrante)}
\end{aligned}$$

Multiplicar a equação diferencial dada pelo factor integrante:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\left(xy+x^3+x\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(1+x^2\right)}_{N(x,y)}dy &= 0 \quad | \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\underbrace{\left(\frac{xy+x^3+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}_{M_1(x,y)}dx + \underbrace{\left(\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)}_{N_1(x,y)}dy &= 0
\end{aligned}$$

Verificar se a nova equação é exacta

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M_1}{\partial y} = \left(\dfrac{xy+x^3+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'_y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x} = \left(\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)'_x = \left(\sqrt{1+x^2}\right)'_x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

Como a nova equação diferencial é exacta, procuramos uma solução geral de forma

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= c, \; c\in\mathbb{R} \text{ onde} \\
&\quad \frac{\partial F}{\partial x} = M_1(x,y) = \frac{xy+x^3+x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (1) \\
&\quad \frac{\partial F}{\partial y} = N_1(x,y) = \sqrt{1+x^2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Integrar (1) em relação a variável x

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial F}{\partial x} dx &= \int \left(\frac{xy + x^3 + x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \\
F(x,y) &= \int \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx + \int \left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx + \int \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx + h(y) \\
F(x,y) &= y\sqrt{1+x^2} + \underbrace{\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \right)}_{\text{C.A.}} dx + \sqrt{1+x^2} + h(y) \\
F(x,y) &= y\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} + h(y) \\
F(x,y) &= y\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2} + h(y) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

C.A.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{P\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \right)}_{\text{Subst: } x=\tan t,\ x'=\sec^2 t} &= P\left(\frac{\tan^3 t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \times \frac{1}{\cos^2 t} \right) = P\left(\frac{\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}}{\frac{1}{\cos t}} \times \frac{1}{\cos^2 t} \right) \\
&= P\frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} = P\frac{\sin t\ \sin^2 t}{\cos^4 t} = P\frac{\sin t\ (1-\cos^2 t)}{\cos^4 t} \\
&= P\frac{\sin t\ - \sin t \cos^2 t}{\cos^4 t} = P\frac{\sin t}{\cos^4 t} - P\frac{\sin t \cos^2 t}{\cos^4 t} \\
&= P\frac{\sin t}{\cos^4 t} - P\frac{\sin t}{\cos^2 t} = P\sin t\,(\cos t)^{-4} - P\sin t\,(\cos t)^{-2} \\
&= -\frac{(\cos t)^{-3}}{-3} + \frac{(\cos t)^{-1}}{-1} = \frac{1}{3\cos^3 t} - \frac{1}{\cos t} \\
&= \frac{1}{3\cos^3(\arctan x)} - \frac{1}{\cos(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Derivar (3) em ordem a variável y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= \left(y\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}+h\left(y\right)\right)'_y \\
\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{N(x,y)} &= \sqrt{1+x^2}+\frac{dh}{dy} \\
N_1\left(x,y\right) &= \sqrt{1+x^2}+\frac{dh}{dy} \\
\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1+x^2}+\frac{dh}{dy} \rightarrow \frac{dh}{dy}=0
\end{aligned}$$

Como $\frac{dh}{dy}=0 \ \rightarrow h\left(y\right)=c,\ c\in\mathbb{R}$ (determinamos a expressão da função $h(y)$).

Substituindo $h(y)$ em (3) obtem-se a solução geral da eq. dif., isto é

$$\begin{aligned}
F\left(x,y\right) &= y\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}+h\left(y\right) \\
F\left(x,y\right) &= y\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}+c \\
&\Leftrightarrow\ y\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}=c,\ c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{7a)}.}$

$$\begin{cases} xy'+y-e^x=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

Problema com valores iniciais, onde

$$xy'+y-e^x=0 \Leftrightarrow y'+y\frac{1}{x}=\frac{e^x}{x}$$

é uma equação diferencial linear de 1^a ordem.

Substituição:

$$y=uv$$

Derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

Obtem-se:

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + uv\frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$$

Pôr u em evidência:

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\frac{1}{x}\right) = \frac{e^x}{x} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{1}{x} = 0 \\ \dfrac{du}{dx}v = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

2 equações dif. de variáveis separadas. Resolvemos a primeira:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + v\frac{1}{x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -v\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{v}dv = -\frac{1}{x}dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{1}{x}dx \\ &\Leftrightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Leftrightarrow \ln|v| = \ln|x|^{-1} \Leftrightarrow \boxed{v = \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Resolvemos a segunda equação dif.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}v &= \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = e^x \\ &\Leftrightarrow du = e^x dx \Leftrightarrow \int du = \int e^x dx \Leftrightarrow u = e^x + c \\ &\Leftrightarrow \boxed{u = e^x + c} \end{aligned}$$

Portanto a solução geral é

$$y = uv = (e^x + c)\left(\frac{1}{x}\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

Solução particular para a condição inicial: $y(1) = 0$, isto é, substituir na solução geral: $y = 0$ e $x = 1$ ou seja

$$y = (e^x + c)\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 0 = \left(e^1 + c\right)\frac{1}{1} \Leftrightarrow c = -e$$

logo obtem-se a seguinte solução particular:

$$y = (e^x - e)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\boxed{\textbf{7b).}}$

$$\begin{cases} y^3 y' = (y^4+1)\cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Problema com valores iniciais onde

$$y^3 y' = \left(y^4+1\right)\cos x \Leftrightarrow y^3\frac{dy}{dx} = \left(y^4+1\right)\cos x$$

é uma equação diferencial de variáveis separadas

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \frac{y^3}{y^4+1}dy = \cos x\ dx \Leftrightarrow \int \frac{y^3}{y^4+1}dy = \int \cos x\ dx \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\int \frac{4y^3}{y^4+1}dy = \int \cos x\ dx \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\ln\left|y^4+1\right| = \sin x + c \text{ (solução geral)} \end{aligned}$$

Para obter a solução particular fazemos $y = 0$ e $x = 0$, isto é

$$\frac{1}{4}\ln\left|y^4+1\right| = \sin x + c \Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln\left|0^4+1\right| = \sin 0 + c \to c = 0,$$

logo temos a solução particular

$$\frac{1}{4}\ln\left|y^4+1\right| = \sin x$$

$\boxed{\textbf{8a).}}$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

equação diferencial (de segunda ordem) linear, de coeficientes constantes e homogénea

Equação característica:

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

Raizes da equação característica: $k = 2$ raiz real dupla (duas raizes reais iguais)

Então $\boxed{y_1(x) = e^{kx} = e^{2x}}$ e $\boxed{y_2(x) = xe^{kx} = xe^{2x}}$ e portanto a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\textbf{8b).}}$

$$y'' - 6y' + 8y = 3$$

equação diferencial (de segunda ordem) linear, de coeficientes constantes e não-homogénea.

Equação homogénea associada

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

Equação característica:

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$

Raizes da equação característica: $k_1 = 2, k_2 = 4$ (2 raizes reais diferentes).

Então $\boxed{y_1(x) = e^{k_1 x} = e^{2x}}$ e $\boxed{y_2(x) = e^{k_2 x} = e^{4x}}$ e portanto a solução geral da eq. homogénea é dada por

$$y_{GH}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

A solução geral da eq. não-homogénea é de forma

$$y(x) = y_{GH}(x) + y_P(x)$$

onde ainda falta determinar a solução particular

$$y_P(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{4x}$$

(onde $c_1(x)$ e $c_2(x)$ vão ser determinados pelo método de variação das constantes)

Formar o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} c_1'(x)\,y_1(x)+c_2'(x)\,y_2(x)=0 \\ c_1'(x)\,y_1'(x)+c_2'(x)\,y_2'(x)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1'(x)\,e^{2x}+c_2'(x)\,e^{4x}=0 \\ c_1'(x)\,2e^{2x}+c_2'(x)\,4e^{4x}=3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} c_1'(x)=-c_2'(x)\,e^{2x} \\ c_1'(x)\,2e^{2x}+c_2'(x)\,4e^{4x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1'(x)=-c_2'(x)\,e^{2x} \\ c_2'(x)=\frac{3}{2}e^{-4x} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1'(x)=-\frac{3}{2}e^{-2x} \\ c_2'(x)=\frac{3}{2}e^{-4x} \end{array}\right.$$

Para obter $c_1(x)$ e $c_2(x)$ temos que primitivar $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$

$$\begin{aligned} c_1(x) &= Pc_1'(x)=P\left(-\frac{3}{2}e^{-2x}\right)=-\frac{3}{2}Pe^{-2x} \\ &= \frac{3}{4}P\left(-2e^{-2x}\right)=\frac{3}{4}e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x) &= Pc_2'(x)=P\frac{3}{2}e^{-4x}=\frac{3}{2}Pe^{-4x} \\ &= \frac{-3}{8}P\left(-4e^{-4x}\right)=\frac{-3}{8}e^{-4x} \end{aligned}$$

Logo a solução geral da equação não-homogénea é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{GH}(x)+y_P(x)= \\ &= c_1e^{2x}+c_2e^{4x}+\underbrace{\left(\frac{3}{4}e^{-2x}\right)}_{c_1(x)}e^{2x}+\underbrace{\left(\frac{-3}{8}e^{-4x}\right)}_{c_2(x)}e^{4x} \\ &= c_1e^{2x}+c_2e^{4x}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}+\frac{3}{8} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{8c).}}$

$$y''-y'-2y=2\sin(2x)$$

equação diferencial (de segunda ordem) linear, de coeficientes constantes e não-homogénea.

Equação homogénea associada

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Equação característica:

$$k^2 - k - 2 = 0$$

Raizes da equação característica: $k_1 = 2, k_2 = -1$ (2 raizes reais diferentes).

Então $\boxed{y_1(x) = e^{k_1 x} = e^{2x}}$ e $\boxed{y_2(x) = e^{k_2 x} = e^{-x}}$ e portanto a solução geral da eq. homogénea é dada por

$$y_{GH}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

A solução geral da eq. não-homogénea é de forma

$$y(x) = y_{GH}(x) + y_P(x)$$

onde ainda falta determinar a solução particular

$$y_P(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{-x}$$

(onde $c_1(x)$ e $c_2(x)$ vão ser determinados pelo método de variação das constantes)

Formar o sistema

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = 2\sin(2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) e^{2x} + c_2'(x) e^{-x} = 0 \\ c_1'(x) 2e^{2x} - c_2'(x) e^{-x} = 2\sin(2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x) e^{-3x} \\ c_1'(x) 2e^{2x} - c_2'(x) e^{-x} = 2\sin(2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x) e^{-3x} \\ c_2'(x) = -\frac{2}{3} e^{x} \sin(2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x) = \frac{2}{3} e^{-2x} \sin(2x) \\ c_2'(x) = -\frac{2}{3} e^{x} \sin(2x) \end{cases}$$

Para obter $c_1(x)$ e $c_2(x)$ temos que primitivar $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= Pc_1'(x) = P\frac{2}{3}e^{-2x}\sin(2x) = \frac{2}{3}Pe^{-2x}\sin(2x) \\
&\quad \text{resolver } Pe^{-2x}\sin(2x) \\
&\quad \boxed{\text{Partes: } \begin{cases} u' = e^{-2x} \\ v = \sin(2x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v' = 2\cos(2x) \end{cases}} \\
Pe^{-2x}\sin(2x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - P\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}2\cos(2x)\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) + \\
&\quad + \underbrace{P\left(e^{-2x}\cos(2x)\right)} \\
&\quad \boxed{\text{Partes: } \begin{cases} u' = e^{-2x} \\ v = \cos(2x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v' = -2\sin(2x) \end{cases}} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - P\left(\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(-2\sin(2x))\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - P\left(e^{-2x}\sin(2x)\right) \\
&\quad \boxed{\text{fechar o ciclo}} \\
Pe^{-2x}\sin(2x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - P\left(e^{-2x}\sin(2x)\right) \\
2Pe^{-2x}\sin(2x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) \\
Pe^{-2x}\sin(2x) &= -\frac{1}{4}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{4}e^{-2x}\cos(2x) \\
\text{portanto } c_1(x) &= \frac{2}{3}Pe^{-2x}\sin(2x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{4}e^{-2x}\cos(2x)\right) \\
&= -\frac{1}{6}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{6}e^{-2x}\cos(2x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2(x) &= Pc_2'(x) = P\left(-\frac{2}{3}e^x \sin(2x)\right) = -\frac{2}{3}Pe^x \sin(2x) \\
& \qquad \text{Partes: } \begin{cases} u' = e^x \\ v = \sin(2x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = 2\cos(2x) \end{cases} \\
Pe^x \sin(2x) &= e^x \sin(2x) - P\left(e^x 2\cos(2x)\right) \\
&= e^x \sin(2x) \\
& \quad - \qquad 2\underbrace{P\left(e^x \cos(2x)\right)} \\
& \qquad \text{Partes: } \begin{cases} u' = e^x \\ v = \cos(2x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v' = -2\sin(2x) \end{cases} \\
&= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 2P\left(e^x\left(-2\sin(2x)\right)\right) \\
&= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + 4P\left(e^x \sin(2x)\right) \\
& \text{fechar o ciclo} \\
Pe^x \sin(2x) &= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + 4P\left(e^x \sin(2x)\right) \\
-3Pe^x \sin(2x) &= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) \\
Pe^x \sin(2x) &= -\frac{1}{3}\left(e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)\right) \\
\text{portanto } c_2(x) &= -\frac{2}{3}Pe^x \sin(2x) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\left(e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)\right)\right) \\
&= \frac{2}{9}\left(e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)\right)
\end{aligned}
$$

Logo a solução geral da equação não-homogénea é dada por

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y_{GH}(x) + y_P(x) \\
&= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \underbrace{\left(-\frac{1}{6}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{6}e^{-2x}\cos(2x)\right)}_{c_1(x)} e^{2x} + \\
& \quad + \underbrace{\left(\frac{2}{9}\left(e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)\right)\right)}_{c_2(x)} e^{-x} \\
&= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{6}\sin(2x) - \frac{1}{6}\cos(2x) + \frac{2}{9}\sin(2x) - \frac{4}{9}\cos(2x) \\
&= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{11}{18}\cos(2x) + \frac{1}{18}\sin(2x)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{9a).}}$

$$y'' + 3y' + 2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Aplicar a transformada de Laplace a equação diferencial dada:

$$\begin{aligned}
L[y'' + 3y' + 2y] &= L[x] \Leftrightarrow L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] = L[x] \\
&\Rightarrow s^2 L[y] - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} + 3sL[y] - 3\underbrace{y(0)}_{0} + 2F(s) = \frac{1}{s^2} \\
&\Rightarrow s^2 F(s) + 3sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s^2} \\
&\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 3s + 2)} \\
&\Rightarrow F(s) = \frac{-3/4}{s} + \frac{1/2}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-1/4}{s+2}
\end{aligned}$$

Aplicar Transformada Inversa para a última expressão

$$\begin{aligned}
y(x) &= L^{-1}\left[\frac{-3/4}{s} + \frac{1/2}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-1/4}{s+2}\right] \\
y(x) &= L^{-1}\left[\frac{-3/4}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{1/2}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{-1/4}{s+2}\right] \\
y(x) &= -\frac{3}{4}e^{0x} + \frac{1}{2}xe^{0x} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \\
&\quad \text{portanto temos a seguinte solução particular} \\
y(x) &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}
\end{aligned}$$

<u>C.A.</u> Método dos coeficientes indeterminados (para a decomposição em

fracções simples)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s^2\left(s^2+3s+2\right)} &= \frac{1}{s^2\left(s+1\right)\left(s+2\right)} \\
&= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s+2} \\
&= \frac{\begin{array}{c} s^3\left(A+C+D\right)+s^2\left(3A+B+2C+D\right)+ \\ +s\left(2A+3B\right)+2B \end{array}}{s^2\left(s+1\right)\left(s+2\right)} \\
&\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+C+D=0 \\ 3A+B+2C+D=0 \\ 2A+3B=0 \\ 2B=1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-3/4 \\ B=1/2 \\ C=1 \\ D=-1/4 \end{array}\right. \\
\text{logo } \frac{1}{s^2\left(s^2+3s+2\right)} &= \frac{-3/4}{s}+\frac{1/2}{s^2}+\frac{1}{s+1}+\frac{-1/4}{s+2}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{9b).}}$

$$
y'+y=\sin x, \quad y\left(0\right)=0
$$

Aplicar a transformada de Laplace a equação diferencial dada:

$$
\begin{aligned}
L\left[y'+y\right] &= L\left[\sin x\right] \Leftrightarrow L\left[y'\right]+L\left[y\right]=L\left[\sin x\right] \\
&\Rightarrow sL\left[y\right]-\underbrace{y\left(0\right)}_{0}+F\left(s\right)=\frac{1}{1+s^2} \\
&\Rightarrow sF\left(s\right)+F\left(s\right)=\frac{1}{1+s^2} \Rightarrow F\left(s\right)\left(s+1\right)=\frac{1}{1+s^2} \\
&\Rightarrow F\left(s\right)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s+1\right)} \\
&\Rightarrow F\left(s\right)=\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Aplicar Transformada Inversa para a última expressão

$$
\begin{aligned}
y\left(x\right) &= L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^{2}+1}\right] \\
y\left(x\right) &= L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^{2}+1}\right] \\
y\left(x\right) &= \frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x \\
& \text{portanto temos a seguinte solução particular} \\
y\left(x\right) &= \frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x
\end{aligned}
$$