ETI / EI, 1^o Ano

UC: Análise Matemática II

Representação geométrica para Integrais Múltiplos - Volumes

Elaborado de: **Diana Aldea Mendes e Rosário Laureano**

Departamento de Métodos Quantitativos

Fevereiro de 2011

Capítulo 1

Representação geométrica para Integrais Múltiplos

- **RECTA**

  - **Que passa pelo ponto** $P_1(x_1, y_1)$ **na direcção do vector** $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$:

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{(x, y) = (x_1, y_1) + k.(v_1, v_2), \text{ para } k \in \mathbb{R}}$$

    ou

    $$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + kv_1 \\ \\ y = y_1 + kv_2 \end{cases}, \text{ para } k \in \mathbb{R}}$$

    ou

    $$\boxed{\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}, \text{ para } v_1, v_2 \neq 0}$$

  - **Que une os pontos** $P_1(x_1, y_1)$ **e** $P_2(x_2, y_2)$:

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2}$$

    ou

    $$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1) \text{ onde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ é o declive (para } x_1 \neq x_2)}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{r} y = mx + b \text{ onde } m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ é o declive (para } x_1 \neq x_2) \qquad\qquad\qquad\quad \\[2ex] \text{e } b = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \text{ é a ordenada na origem (para } x_1 \neq x_2) \end{array}}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{r} Ax + By + C = 0 \text{ onde } A = y_1 - y_2 \\ B = x_2 - x_1 \\ \text{e } C = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array}}$$

– **Que intersecta o** x-eixo **em** $a \neq 0$ **e o** y-eixo **em** $b \neq 0$ **:**

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

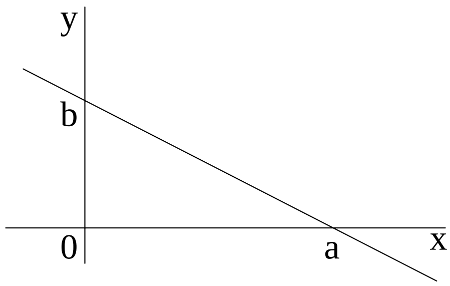


Figura 1.1:

– **Que faz um ângulo** $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ **com a parte positiva do** x-eixo **e passa pelo ponto** $P_1(x_1, y_1)$ **:**

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1) \text{ onde } m = \tan\alpha \text{ é o declive}}$$

– **Que dista** p **unidades da origem e a perpendicular da origem sobre a recta faz um ângulo** β **com a parte positiva do** x-eixo:

Equação analítica em coordenadas rectangulares

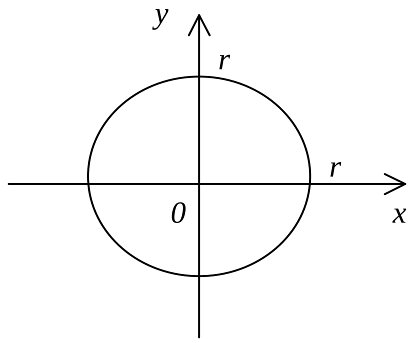
$$\boxed{x\cos\beta + y\sin\beta = p}$$

- **CIRCUNFERÊNCIA**

  – **De centro** $C\,(0,0)$ **e de raio** r :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

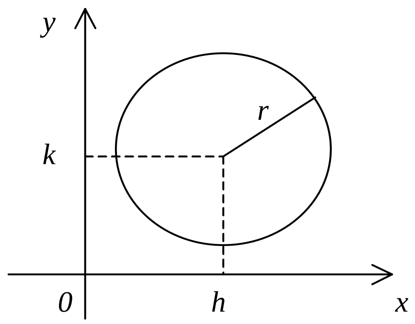
$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



  – **De centro** $C\,(h,k)$ **e de raio** r :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$



  Equação analítica em coordenadas polares no caso da circunferência passar pela origem

$$\boxed{r = 2R\cos(\theta - \alpha) \text{ onde } (R,\alpha) \text{ são as coordenadas polares do centro } C}$$

– Um ponto pode localizar-se no plano por meio de *coordenadas rectangulares* (x, y) ou por *coordenadas polares* (r, θ). As coordenadas rectangulares e polares relacionam-se pelas expressões

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{array}\right.$$

para $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

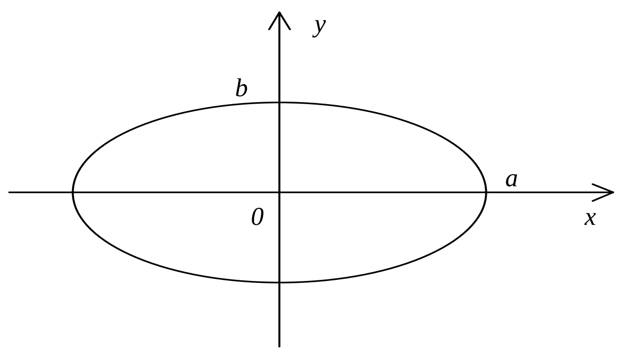
- **ELIPSE**

– **De centro $C\,(0,0)$, de eixo maior paralelo ao x-eixo, de raio $a \neq 0$ na direcção horizontal (ou de eixo maior $2a$) e de raio $b \neq 0$ na direção vertical (ou eixo menor $2b$):**

Se P é um ponto arbitrário da elipse de focos F e F' então verifica $PF + PF' = 2a$.

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

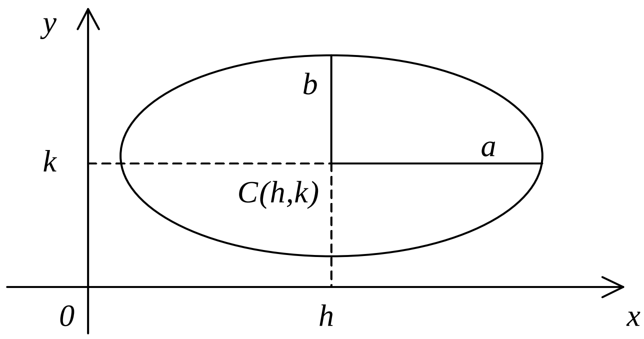


– **De centro $C\,(h,k)$, de eixo maior paralelo ao x-eixo, de raio a na direcção horizontal(ou de eixo maior $2a$) e de raio b na direcção vertical (ou eixo menor $2b$):**

Se P é um ponto arbitrário da elipse de focos F e F' então $PF + PF' = 2a$.

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$



Equações dos eixos de simetria

$$x = h \text{ e } y = k$$

Distância do centro C a cada um dos 2 vértices situados na recta $y = k$ é b e a distância do centro C a cada um dos 2 vértices situados na recta $x = h$ é a. Distância do centro C a cada um dos 2 focos (situados na recta $y = k$) é $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e a excentricidade é dfada por

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Equação analítica em coordenadas polares no caso de C estar na origem

$$\boxed{r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}}$$

Equação analítica em coordenadas polares no caso de C estar sobre a parte positiva do x-eixo e um dos focos estar na origem

$$\boxed{r = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\theta}, \text{ para } 1-\varepsilon\cos\theta \neq 0}$$

– **De eixo maior paralelo ao** y-eixo:

permutar x e y em coordenadas rectângulares

substituir θ por $\frac{\pi}{2} - \theta$ em coordenadas polares

- **PARÁBOLA**

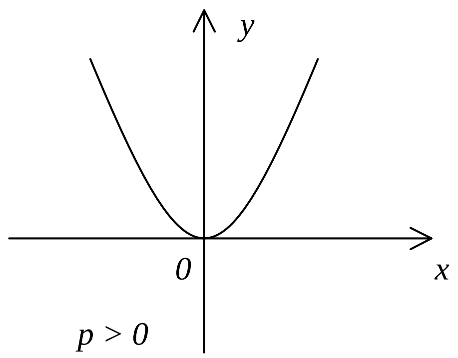
  - **Com eixo de simetria vertical, de vértice** $V(0,0)$ **que dista** $\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F :

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{x^2 = 2py,\ p > 0}$$

    Equação analítica em coordenadas polares

    $$\boxed{r = \frac{2a}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)},\ \text{para } 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \neq 0}$$

  - **Com eixo de simetria vertical, de vértice** $V(0,0)$ **que dista** $-\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F :

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{x^2 = 2py,\ p < 0}$$

  - **Com eixo de simetria vertical, de vértice** $V(h,k)$ **que dista** $\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F :

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{(x-h)^2 = 2p(y-k),\ p > 0}$$

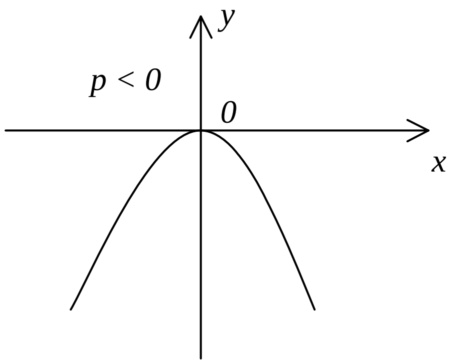


Figura 1.2:

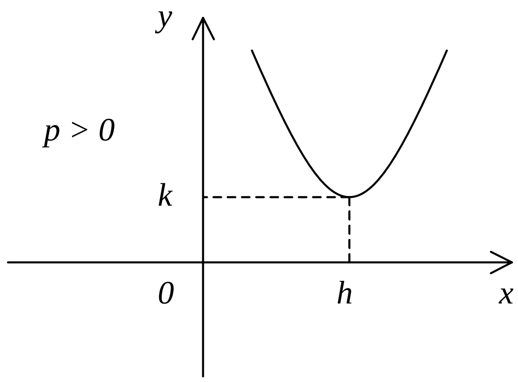


Figura 1.3:

Equação do eixo de simetria

$$x = h$$

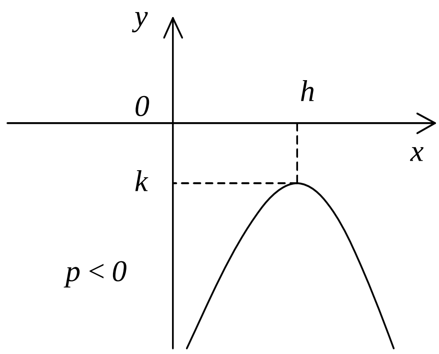
– **Com eixo de simetria vertical, de vértice** $V\,(h,k)$ **que dista** $-\dfrac{p}{2}$ **unidades do foco** F :

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{(x-h)^2 = 2p\,(y-k),\ p<0}$$

Equação do eixo de simetria

$$x = h$$



- – **Com eixo de simetria vertical, de vértice** $V\,(h,0)$ **que dista** $\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F **:**

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$\boxed{(x-h)^2 = 2py,\ p>0}$$

  Equação do eixo de simetria

  $$x = h$$

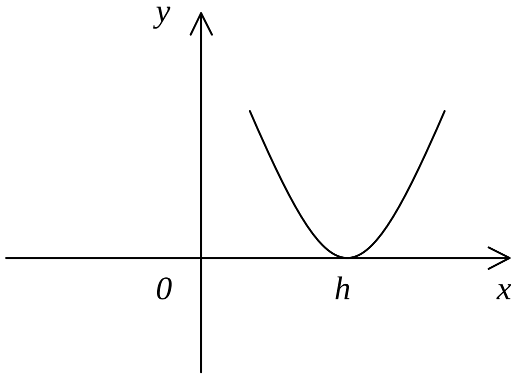


Figura 1.4:

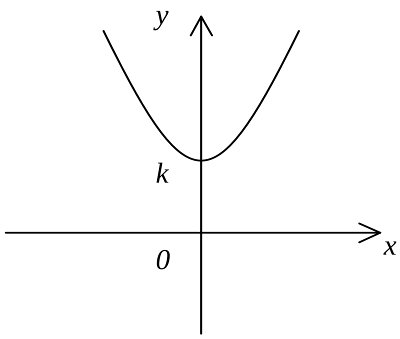
– **Com eixo de simetria vertical, de vértice** $V\,(0,k)$ **que dista** $\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F **:**

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{x^2 = 2p\,(y-k),\ p>0}$$

Equação do eixo de simetria

$$x = 0$$



- – **Com eixo de simetria horizontal, de vértice** $V\,(0,0)$ **que dista** $\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$\boxed{y^2 = 2px,\ p>0}$$

  Equação analítica em coordenadas polares

  $$\boxed{r = \frac{2a}{1-\cos\theta}}$$

  – **Com eixo de simetria horizontal, de vértice** $V\,(h,k)$ **que dista** $\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$\boxed{(y-k)^2 = 2p\,(x-h),\ p>0}$$

  Equação do eixo de simetria

  $$y = k$$

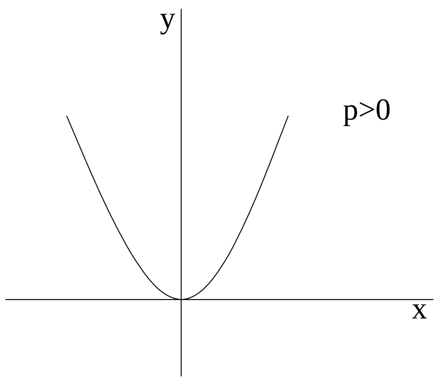
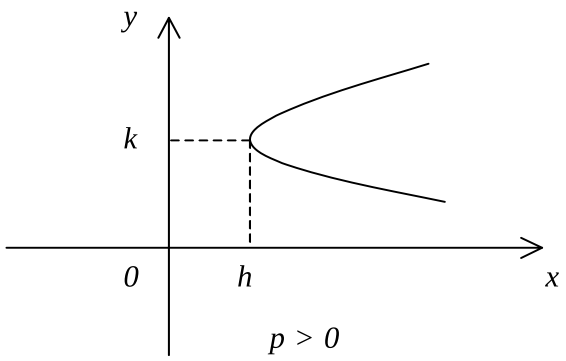


Figura 1.5:



- – **Com eixo de simetria horizontal, de vértice** $V(h,k)$ **que dista** $-\frac{p}{2}$ **unidades do foco** F :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{(y-k)^2 = 2p\,(x-h),\; p<0}$$

  Equação do eixo de simetria

$$y = k$$

- **HIPÉRBOLE**

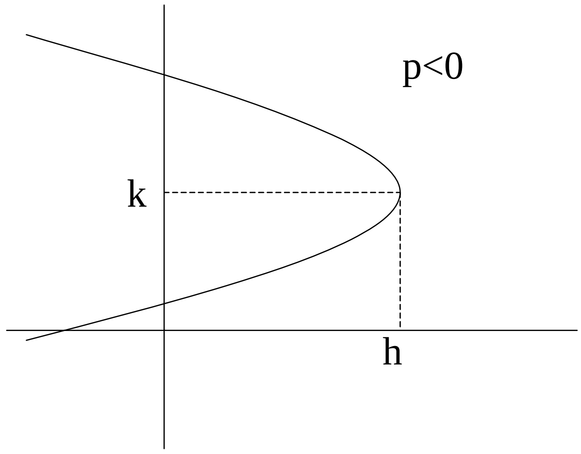


Figura 1.6:

– **De centro** $C(h,k)$, **de eixo maior paralelo ao** x-eixo, **de eixo maior** $2a \neq 0$ **e eixo menor** $2b \neq 0$:

Se P é um ponto arbitrário da hipérbole de focos F e F' então verifica $PF - PF' = \pm 2a$ (o sinal depende do ramo).

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Distância do centro C a cada um dos 2 vértices situados na recta $x = h$ é a e a distância do centro C a cada um dos 2 focos (situados na recta $y = k$) é $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. A excentricidade é dada por

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Declives das rectas assimptotas à hipérbole

$$\pm\frac{b}{a}$$

Equação analítica em coordenadas polares no caso de C estar na origem

$$\boxed{r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}, \text{ para } b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta \neq 0}$$

Equação analítica em coordenadas polares no caso de C estar sobre a parte positiva do x-eixo e um dos focos estar na origem

$$\boxed{r = \frac{\varepsilon^2 - 1}{1 - \varepsilon \cos\theta}, \text{ para } 1 - \varepsilon\cos\theta \neq 0}$$

- **De eixo maior paralelo ao** y-eixo:

  permutar x e y em coordenadas rectangulares

  substituir θ por $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ em coordenadas polares

Seguem-se então as superfícies no espaço.

- **PLANO**

  - **xOy** :

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{z = 0}$$

  - **Paralelo ao** xOy-plano**que passa no ponto** $P_1(a, b, d)$:

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{z = d}$$

    Ponto de intersecção com o z-eixo

    $$(0, 0, d)$$

  - **yOz** :

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

    $$\boxed{x = 0}$$

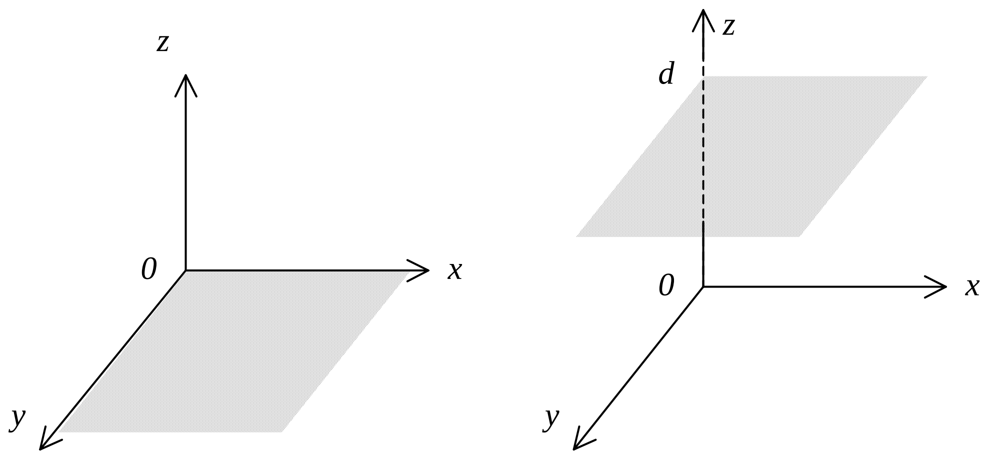


Figura 1.7:

– **Paralelo ao** yOz-plano **que passa no ponto** $P_1(d,b,c)$:

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{x = d}$$

Ponto de intersecção com o x-eixo

$$(d,0,0)$$

– **xOz** :

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{y = 0}$$

– **Paralelo ao** xOz-plano **que passa no ponto** $P_1(a,d,c)$:

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{y = d}$$

Ponto de intersecção com o y-eixo

$$(0,d,0)$$

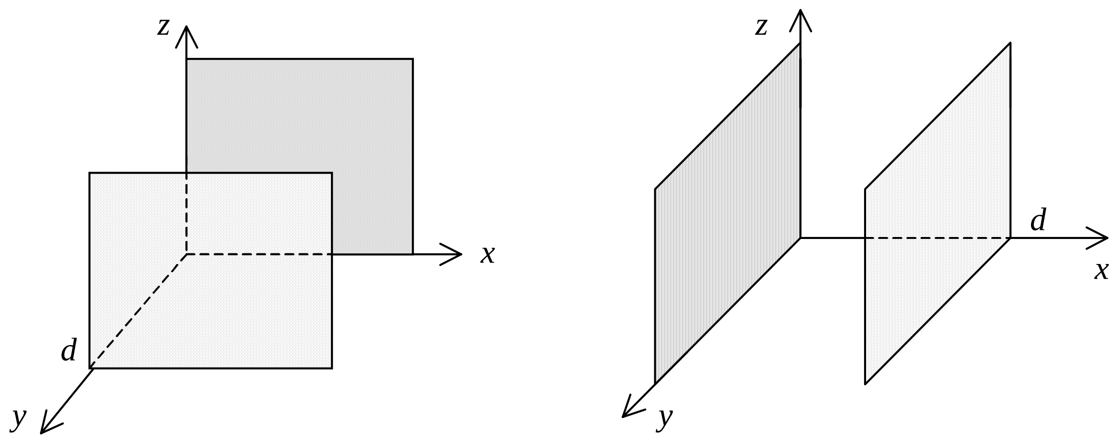


Figura 1.8:

– **Que passa pelos pontos** $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ **e** $P_3(x_3, y_3, z_3)$:

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

– **Que intersecta os eixos coordenados em** $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ **e** $z_0 \neq 0$:

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1 \text{ sendo } x_0 = \frac{d}{a},\, y_0 = \frac{d}{b} \text{ e } z_0 = \frac{d}{c}}$$

– **Que dista** p **unidades da origem e a perpendicular tomada da origem sobre o plano faz ângulos** α, β **e** γ **com a parte positiva dos** x-eixo, y-eixo **e** z-eixo, **respectivamente**:

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \text{p}}$$

A representação gráfica do plano (**ou de qualquer outra superfície no espaço**) exige o cálculo das intersecções da superfície com os 3 eixos coordenados (caso elas existam).Para determinar o ponto em que a superfície intersecta o x-eixo considera-se o

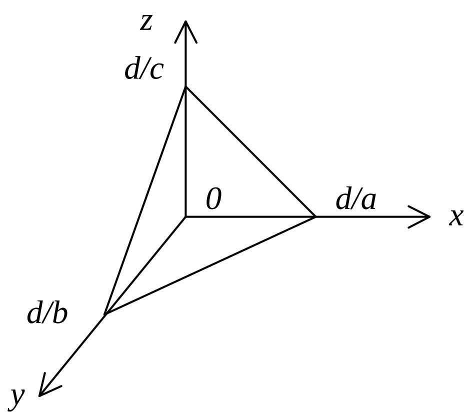


Figura 1.9:

sistema

$$\begin{cases} \text{equação da superfície} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

atendendo a que o x-eixo é caracterizado no espaço pela condição $y = 0 \wedge z = 0$; na prática, trata-se de substituir na equação da superfície y e z por zero. O valor de x que se obtem resolvendo a equação resultante da substituição efectuada é a abcissa do ponto de intersecção procurado; se da substituição resulta uma equação impossível significa que não existe ponto de intersecção com o x-eixo, ou seja, a superfície não intersecta este eixo coordenado.Analogamente se procede para determinar a intersecção com cada um dos outros eixos coordenados: com o y-eixo considerando a condição $x = 0 \wedge z = 0$ e com o z-eixo a condição $x = 0 \wedge y = 0$.

- – **Paralelo ao x-eixo que intersecta o y-eixo em $y_0 \neq 0$ e o z-eixo em $z_0 \neq 0$:**

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$\boxed{\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1 \text{ sendo } y_0 = \frac{d}{b} \text{ e } z_0 = \frac{d}{c}}$$

  Pontos de intersecção com os eixos coordenados

  $$(0, y_0, 0) \;\text{ e }\; (0, 0, z_0)$$

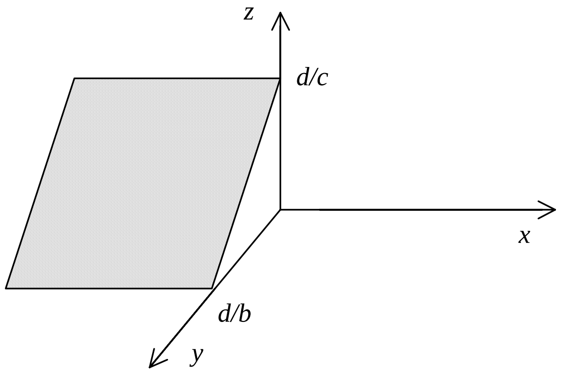


Figura 1.10:

– **Paralelo ao y-eixo que intersecta o x-eixo em $x_0 \neq 0$ e o z-eixo em $z_0 \neq 0$:**

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x}{x_0} + \frac{z}{z_0} = 1 \text{ sendo } x_0 = \frac{d}{a} \text{ e } z_0 = \frac{d}{c}}$$

Pontos de intersecção com os eixos coordenados

$$(x_0, 0, 0) \text{ e } (0, 0, z_0)$$

– **Paralelo ao z-eixo que intersecta o $x-$eixo em $x_0 \neq 0$ e o y-eixo em $y_0 \neq 0$:**

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1 \text{ sendo } x_0 = \frac{d}{a} \text{ e } y_0 = \frac{d}{b}}$$

Pontos de intersecção com os eixos coordenados

$$(x_0, 0, 0) \text{ e } (0, y_0, 0)$$

- **SUPERFÍCIE ESFÉRICA**

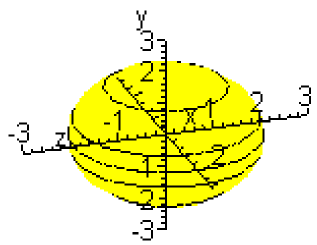


Figura 1.11:

– **De centro** $C\,(0,0,0)$ **e raio** R :

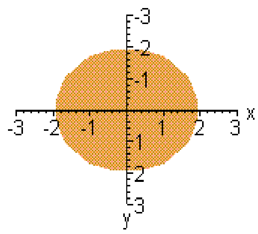
Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$$

A figura seguinte ilustra a superfície esférica (de centro $C(0,0,0)$ e) de raio $R = 2$

Projecção no xOy-plano

circunferência de equação $y^2 + z^2 = R^2$



A obtenção da curva de projecção da superfície esférica (ou **de qualquer outra superfície no espaço**) no xOy-plano obtem-se pela resolução do sistema

$$\begin{cases} \text{equação da superfície} \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

por ser a condição $z = 0$ que caracteriza o xOy-plano.Analogamente para cada um dos outros planos coordenados: para a projecção no yOz-plano usa-se a condição $x = 0$ e para a projecção no xOz-plano usa-se $y = 0$.

Equação analítica em coordenadas esféricas

$$\boxed{\rho = R}$$

Um ponto pode localizar-se no espaço por meio de *coordenadas rectângulares* (x, y, z) ou por *coordenadas esféricas* (ρ, θ, φ) (entre outras). As coordenadas rectângulares e esféricas relacionam-se pelas expressões

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

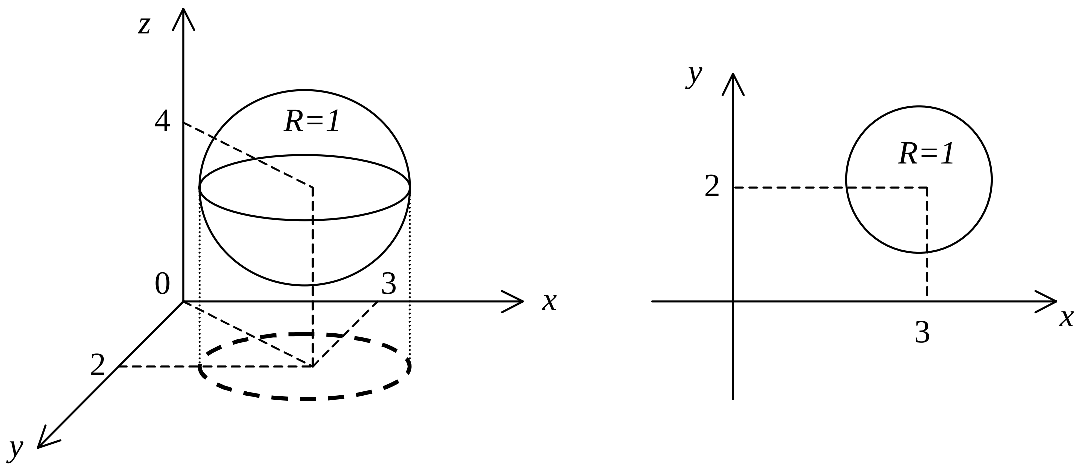
para $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

- – **De centro** $C\,(x_0, y_0, z_0)$ **e raio** R **:**

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}$$

  A figura ilustra a superfície esférica de centro $C\,(3, 2, 4)$ e de raio $R = 1$e a sua projecção no xOy-plano (ou seja, a circunferência de centro $C'(3,2)$ e raio 1



De notar que as projecções da superfície esférica nos xOz-plano ou yOz-plano são também circunferências de raio 1 mas de centros diferentes: de centro $C''(3,4)$ para a projecção no xOz-plano, de centro $C'''(2,4)$ para o yOz-plano.

Equação analítica em coordenadas esféricas

$$\boxed{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = R^2, \text{ sendo } (\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \text{ as coordenadas esféricas de } C}$$

- **ELIPSÓIDE**

  - **De centro $C(0,0,0)$, de raio a na direcção x, de raio b na direcção y e raio c na direcção z :**

    Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Projecção no xOy-plano

$$\text{elipse de equação } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Projecção no yOz-plano

$$\text{elipse de equação } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Projecção no xOz-plano

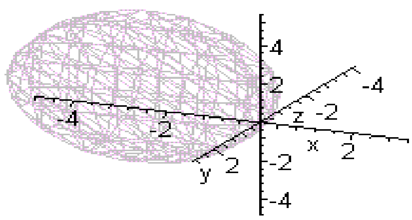
$$\text{elipse de equação } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

– **De centro $C(x_0, y_0, z_0)$, de raio a na direcção x, de raio b na direcção y e raio c na direcção z :**

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1}$$

A figura ilustra o elipsóide de equação $(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{9} + \frac{(z-2)^2}{16} = 1$. Tem centro $C(1, -2, 2)$ e raio 1 na direcção x, raio 3 na direcção y e raio 4 na direcção z.



- **PARABOLÓIDE ELÍPTICO**

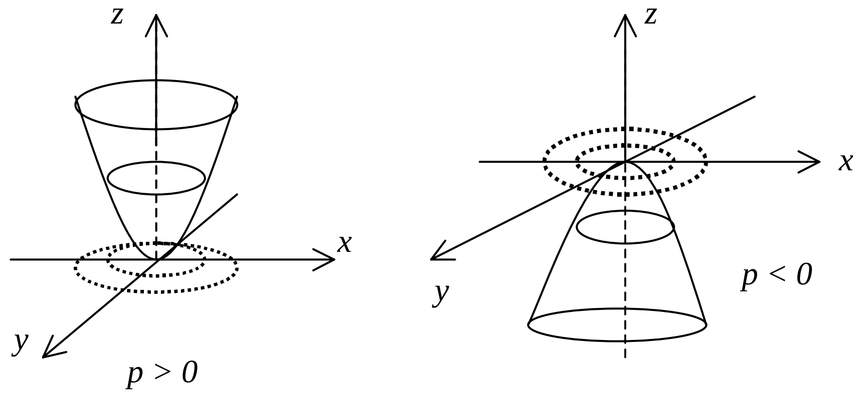
– **De vértice $V(0, 0, 0)$ que se desenvolve ao longo da direcção z :**

Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \;\; p \neq 0}$$

Projecção no xOy-plano

$$\text{elipse de equação } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



O parabolóide desenvolve-se ao longo da direcção z, a variável que não aparece explicitamente na sua equação.

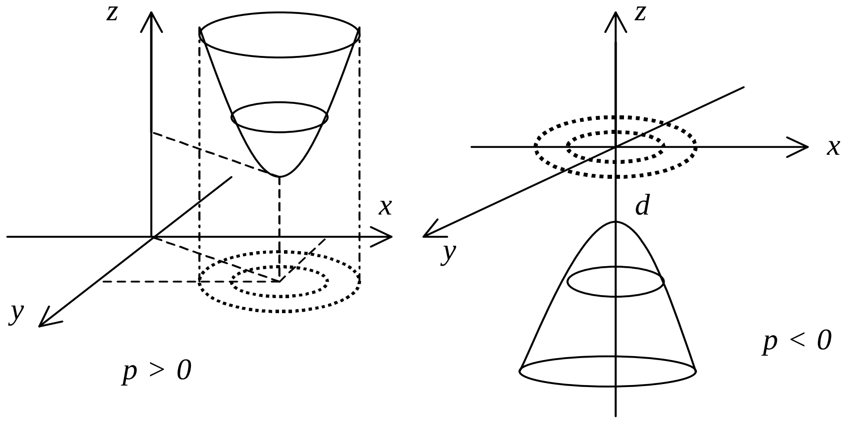
- **– De vértice $V(x_0, y_0, z_0)$ que se desenvolve ao longo da direcção z :**

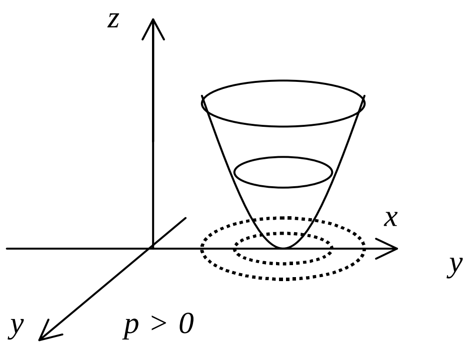
  Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z_0 + 2pz}$$

  Projecção no xoy-plano

$$\text{elipse de equação } \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = z_0$$



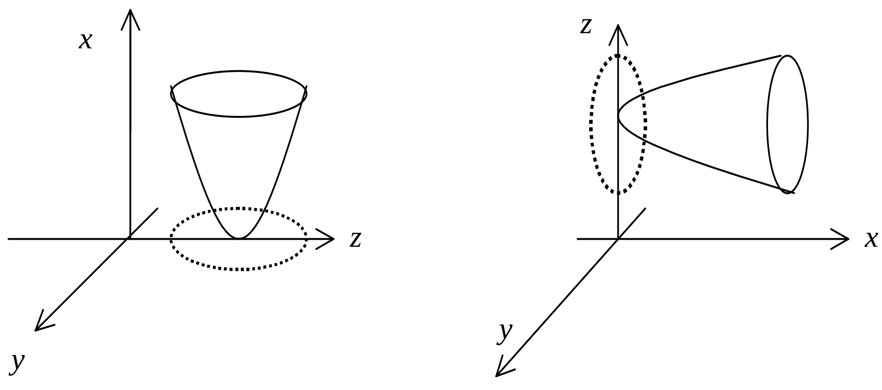


As últimas 2 figuras representam parabolóides transladados apenas na direcção z na direcção do x, respectivamente.

- – **Que se desenvolve ao longo da direcção** x :

permutar x e z em coordenadas rectangulares

A figura seguinte ilustra o mesmo parabolóide elíptico $\dfrac{(z-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2px$ em diferente posicionamento dos eixos coordenados



– **Que se desenvolve ao longo da direcção** y :

permutar y e z em coordenadas rectangulares

- **CILINDRO ELÍPTICO**

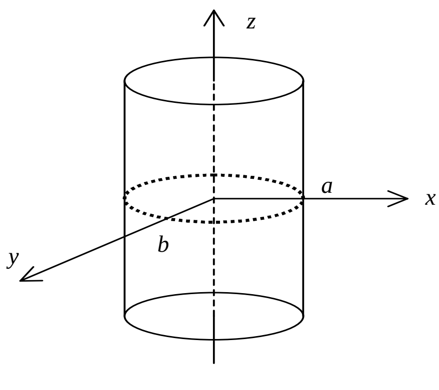
  – **Que se desenvolve ao longo da direcção** z :

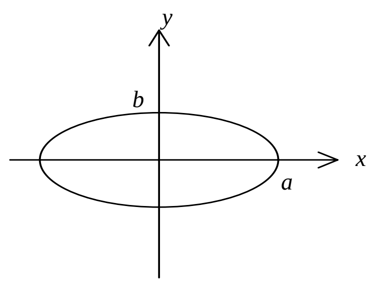
  Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

  Projecçção no xOy-plano

$$\text{elipse de equação } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

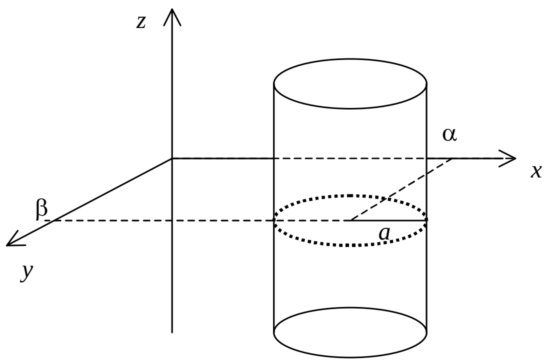


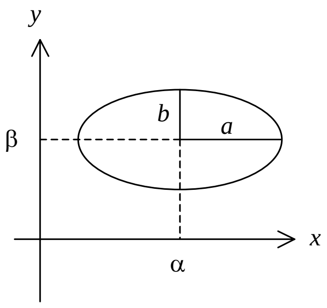


Alterando x^2 para $(x - x_0)^2$ dá-se um deslocamento do cilindro na direcção x em x_0 unidades. Se x^2 dá lugar a $(x - x_0)^2$ e, simultaneamente y^2 dá lugar a $(y - y_0)^2$ obtem-se um cilindro deslocado em ambas as direcções x e y de equação

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

cuja projecção no $xy - plano$ é a elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e de raio a na direcção x e raio b na direcção y.





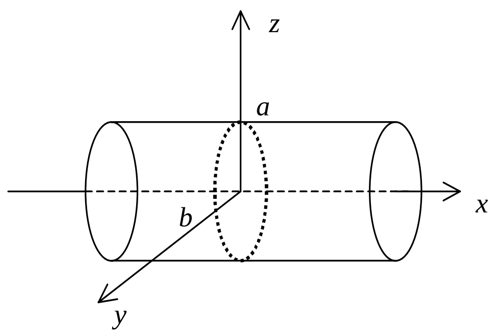
- – **Que se desenvolve ao longo da direcção** x :

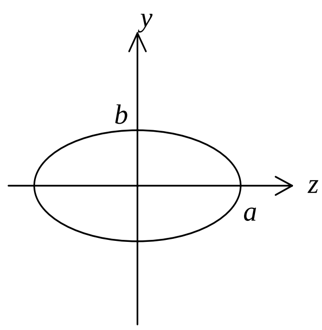
  Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\boxed{\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(z-z_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

  Projecção no yOz-plano

$$\text{elipse de equação} \quad \frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{(z-z_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$





- – **Que se desenvolve ao longo da direcção** y :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(z-z_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1}$$

Projecção no xOz-plano

$$\text{elipse de equação} \quad \frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(z - z_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

- **CILINDRO PARABÓLICO**

  – **Que se desenvolve ao longo da direcção z "em torno" da direcção x :**

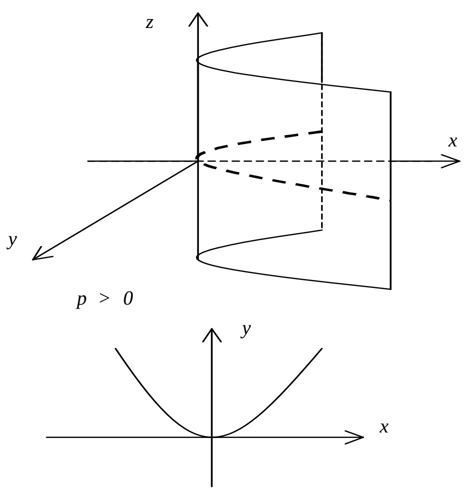
  Equação analítica em coordenadas rectangulares

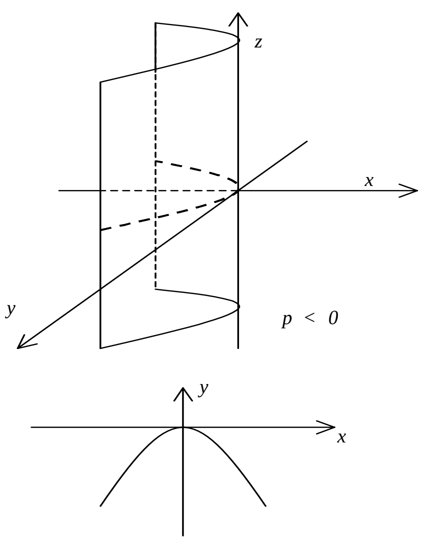
$$\boxed{x^2 = 2py, \ \ \text{para } p \neq 0}$$

  Projecção no xOy-plano

$$\text{parábola de equação } x^2 = 2py, \ \ \text{para } p \neq 0$$

O cilindro desenvolve-se na direcção z, a direcção da variável que não aparece explicitamente na sua equação.





O parabolóide desenvolve-se "em torno" da direcção x, a direcção da variável quadrática. O sinal do coeficiente p da variável linear conduz à "orientação" do parabolóide: virada para a parte positiva do eixo da variável linear se $p > 0$ e virada para a parte negativa do eixo dessa variável se $p < 0$.

Se além disso a equação contém uma constante, por exemplo,

$$x^2 = 2py + b$$

então o cilindro desloca-se b unidades na direcção da variável linear, nesse caso de y. Atenção também no signal de b que pode ser negativo ou positivo

- – **Que se desenvolve ao longo da direcção** z **"em torno da direcção** y :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$y^2 = 2px, \quad \text{para } p \neq 0$$

  – **Que se desenvolvem ao longo da direcção** x :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$y^2 = 2pz \quad \text{ou} \quad z^2 = 2py \ , \quad \text{para } p \neq 0$$

  – **Que se desenvolvem ao longo da direcção** y :

  Equação analítica em coordenadas rectangulares

  $$x^2 = 2pz \quad \text{ou} \quad z^2 = 2px \ , \quad \text{para } p \neq 0$$

Não se esqueça que antes de fazer o gráfico de qualquer das superfícies referidas acima é conveniente

pôr a sua equação na forma analítica "standard"
identificar "o papel" das diferentes variáveis
atender ao sinal dos coeficientes que afectam as variáveis
atender às constantes que determinam translações
determinar os pontos de intersecção com os eixos coordenados
identificar algumas curvas de projecção nos planos coordenados.