ISCTE - **IUL, CURSO DE ETI e EI**

2^o Trabalho de ANÁLISE MATEMÁTICA II

Data de entrega: 30 de Maio de 2011

20 de Maio de 2011 **Ano lectivo: 2010/2011**

1. Seja $f : D_f \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{x^2 + y^2}.$$

   (a) Determine o domínio D_f e representa-o graficamente.

   (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$

2. Seja $f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2\left(x^2 - y^2\right)}{x^4 - y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade da função no ponto $(0,0)$.

   (b) Calcule as derivadas parciais de $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$. O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$? Justifique.

3. Seja $f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 + x^4}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Mostre que a função é contínua no ponto $(0,0)$.

   (b) Verifique se $f(x,y)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$.

4. Considere a seguinte função

$$u = \sin x + F(\sin y - \sin x).$$

   Sabendo que F é diferenciável, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x \cos y.$$

5. Considere a seguinte função real

$$f(x,y) = e^{x/y} + \frac{xy}{x^2+y^2}$$

   (a) Calcule a derivada dirigida de $f(x,y)$ no ponto $(1,1)$ segundo o vector $\overrightarrow{v} = (0,1)$. Diga qual é a direcção e sentido do vector segundo o qual a derivada dirigida é máxima.
   (b) Determine as equações do plano tangente e da recta normal ao gráfico da função $f(x,y)$ no ponto $(1,1)$.

6. Sendo $F(x,y) = xg(x-y, y-x) + yh(y-x, x-y)$ com g e h de classe C^1 mostre que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = g(x-y, y-x) + h(y-x, x-y)$$

7. Considere a seguinte função vectorial de variável vectorial

$$\overrightarrow{f}(x,y,z) = (xz, yz, xy)$$

   Calcule a matriz Jacobiana, a divergência e o rotacional de $\overrightarrow{f}$.

8. Sejam $z = x+iy$ e $w = a+ib$ duas variáveis complexas tal que $|z| = 1$ e $|w| = 1$. Mostre que

$$|z-w|^2 = |1-z\overline{w}|^2 .$$

9. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação

$$e^z + e^{-z} + 1 = 0.$$

10. Determine as constantes reais a e b por forma que a função

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 + ay^2 + 2xy + i\left(bx^2 + y^2 + 2xy\right)$$

   seja analítica em $\mathbb{C}$. Determine a derivada de f e exprima f como função de z.

11. Mostre que a função complexa $f(z) = 2y + ix$ não é analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

12. Determine o domínio de analiticidade da seguinte função complexa:

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

   e calcule a sua derivada.

13. Calcule os seguintes integrais

   (a) $\displaystyle\int_\gamma z^2 \, dz$ onde γ é o segmento de recta que une os pontos $A = 0$ e $B = 2$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ onde γ é o rectângulo de vértices $0,\ 1,\ 1+i,\ i$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z-4}\, dz$ para $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

14. Utiliza as fórmulas integrais de Cauchy para calcular:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z\,(z^2+8)}\, dz$ onde γ é o quadrado de centro na origem e lado 2.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^3}\, dz$ onde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}\, dz$ onde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$

15. Cálcule os seguintes integrais utilizando o Teorema dos Resíduos

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-2i)}\, dz$ para $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{(z-1)\,(z^2-2z+5)}\, dz$ para $\gamma = \{z \in C : |z| = 4\}$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z-1}}{z-1}\, dz$ para $\gamma = \{z \in C : |z| = 2\}$.