DMQ - Departamento de Métodos Quantitativos

LEI - Eng. Informática e LETI - Eng. De Telecomunicações e Informática

1º Trabalho de AM I – CORRECÇÃO

Ano lectivo **2010/2011**

1. (a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{12x^3 - 1}{\sqrt{1 - (3x^4 - x)^2}}$

   (b) $$\begin{aligned} g'(x) &= 3(2x)\left[-\sin(x^2)\right] - 4\left[2\cos(x)\sin x\right] + \left(\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\right)' - 3\sec^2(4x)\left(\frac{1}{\cos(4x)}\right)' \\ &= -6x\sin(x^2) - 4\sin(2x) + \frac{3}{\cos^2(3x)} - 3\sec^2(4x)\frac{4\sin(4x)}{\cos^2(4x)} \\ &= -6x\sin(x^2) - 4\sin(2x) + \frac{3}{\cos^2(3x)} - \frac{48\sin(4x)}{\cos^4(4x)}. \end{aligned}$$

2. A série numérica $\sum_{n\geq 1} (-3)^n$ é divergente pelo Critério do Termo Geral, pois o seu termo geral $u_n = (-3)^n$ não tem limite (há duas subsucessãoes com limites diferentes, 3 e -3), logo não converge para 0. Também se pode argumentar que é uma série geométrica de razão $r = -3 \notin \left]-1, 1\right[$ (ou seja, $|r| = |-3| = 3 \not< 1$).

   A série numérica $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n$ é divergente pelo Critério do Termo Geral, pois o seu termo geral $u_n = \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n$ tende para $\frac{3}{2} \neq 0$,

   $$\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n \underset{\text{limite de referência}}{=} \frac{3}{2}.$$

   A série numérica $\sum_{n\geq 2} \frac{5}{3^n} = 5\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $r = \dfrac{1}{3} \in \left]-1,1\right[$ (ou seja, $|r| = \left|\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$). Note que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{5}{3^{n+1}}}{\dfrac{5}{3^n}} = \frac{5 \cdot 3^n}{5 \cdot 3^{n+1}} = \frac{5 \cdot 3^n}{5 \cdot 3^n \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

É possível determinar a sua soma pela expressão

$$S = \frac{\text{primeiro termo}}{1 - \text{razão}} = \frac{\dfrac{5}{3^2}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

3. A série de potências de x

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2n!} \cdot x^n \right),$$

em que $v_n = 1/(2n!)$, é convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$ porque

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \lim_n \left| \frac{\dfrac{1}{2(n+1)!}}{\dfrac{1}{2n!}} \right| = \lim_n \left| \frac{2n!}{2(n+1)!} \right| \\ &= \lim_n \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/0 = +\infty$. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$.

4. A série de potências de $x - 1$

$$\sum_{n \geq 1} u_n(x-1) = \sum_{n \geq 1} \left[n \cdot (x-1)^{n-1} \right]$$

em que $v_n = n$, é convergente para $x \in \left]0,2\right[$ porque

$$L = \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \lim_n \left| \frac{n+1}{n} \right| = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + 0 = 1$$

donde $R = 1/L = 1/1 = 1$. A condição de convergência $|x-1| < R$ é então

$$|x-1| < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x-1 < 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < x < 2.$$

Para $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ a série de potências é divergente. Para $x = 0$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(0-1) = \sum_{n\geq 1} \left[n \cdot (0-1)^{n-1}\right] = \sum_{n\geq 1} \left[n \cdot (-1)^{n-1}\right]$$

que é divergente, pois o seu termo geral não tem limite (há duas subsucessões com limites diferentes, $(n \cdot 1) \to +\infty$ e $(n \cdot (-1)) \to -\infty$), logo não converge para 0. Para $x = 2$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(2-1) = \sum_{n\geq 1} \left[n \cdot (2-1)^{n-1}\right] = \sum_{n\geq 1} n$$

que é divergente, pois o seu termo geral tende para $+\infty$. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D =]0, 2[$.

5. Temos $h(x) = P\left[h'(x)\right]$, logo

$$\begin{aligned} h(x) &= P\left[5x^3 + 4\sqrt{x} + \frac{2}{x} + x\sin\left(x^2\right)\right] = 5\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^{3/2}}{3/2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + C \\ &= \frac{5}{4}x^4 + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + C, \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$. Dado que $h(1) = 3$, então

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} + \frac{8}{3} + 2\ln|1| - \frac{1}{2}\cos(1) + C &= 3 \Leftrightarrow C = 3 - \frac{5}{4} - \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\cos 1 \\ &\Leftrightarrow \quad C = -\frac{11}{12} + \frac{1}{2}\cos 1. \end{aligned}$$

Como tal,

$$h(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) - \frac{11}{12} + \frac{1}{2}\cos 1$$

6. (a) $P\,\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = P\,\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - P\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = P\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}P\left[(-2x)\cdot(1-x^2)^{1/2}\right]$

$$= \arcsin(x) + \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3/2} + C = \arcsin(x) + \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

(b) Considerando a substituição $\sqrt{x} = t$, donde $x = t^2$ e $x' = 2t$, temos

$$\begin{aligned} P\left(\exp\sqrt{x}\right) &= P\left[\exp(t)\cdot 2t\right] = 2P\left(t\cdot\exp t\right) \underset{\text{p/ partes}}{=} 2\left[t\cdot\exp t - P\exp t\right] \\ &= 2\left[t\cdot\exp(t) - \exp t\right] + C = 2(t-1)\exp(t) + C, \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$.

(c) $P\ \dfrac{2\cos(\ln x)}{x} = 2P\left[\dfrac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)\right] = -2\sin(\ln x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

(d) $P\left[\sin^3(2x)\cdot\cos(2x)\right] = \dfrac{1}{2}P\left[(\sin(2x))^3\cdot(2\cos(2x))\right] = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\sin(2x))^4}{4} + C$

$= \dfrac{1}{8}\sin^4(2x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

(e) Considerando a substituição $\sqrt{1+\ln x} = t$, donde $x = \exp(t^2-1)$ e $x' = (2t)\exp(t^2-1)$, temos

$$\begin{aligned} P\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} &= P\left[\frac{t^2-1}{\exp(t^2-1)\,t}2t\exp\left(t^2-1\right)\right] = 2P\left(t^2-1\right) \\ &= 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C = 2\left(\frac{\left(\sqrt{1+\ln x}\right)^3}{3} - \sqrt{1+\ln x}\right)+C \\ &= 2\left(\frac{(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3} - \sqrt{1+\ln x}\right)+C, \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$

(f) $P\left[4\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] = 4P\left[1\cdot\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] \underset{\text{p/ partes}}{=} 4P\left[1\cdot\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

$= 4\left[x\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) - P\left(x\cdot\dfrac{1/2}{1+(x^2/4)}\right)\right] = 4\left[x\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) - P\dfrac{2x}{4+x^2}\right]$

$= 4x\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) - 4\ln(4+x^2) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

(g) $P\ \dfrac{\exp(3x)}{1+\exp(6x)} = P\dfrac{\exp(3x)}{1+[\exp(3x)]^2} = \dfrac{1}{3}P\dfrac{3\exp(3x)}{1+[\exp(3x)]^2} = \dfrac{1}{3}\ln\left[1+\exp^2(3x)\right]+C$, com $C \in \mathbb{R}$.

(h) $P\left[x\tan(7x^2-3)\right] = P\left[x\dfrac{\sin(7x^2-3)}{\cos(7x^2-3)}\right] = -\dfrac{1}{14}P\ \dfrac{-14x\sin(7x^2-3)}{\cos(7x^2-3)}$

$= -\dfrac{1}{14}\ln\left|\cos(7x^2-3)\right| + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

(i) Efectuando a substituição tgrigonométrica $4x = 3\sin t$, donde $x' = \dfrac{3}{4}\cos t$, temos

$$
\begin{aligned}
P\frac{x^2}{\sqrt{9-16x^2}} &= P\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\sin t\right)^2}{\sqrt{9-16\left(\frac{3}{4}\sin t\right)^2}}\,\frac{3}{4}\cos t\right] = P\left[\frac{\frac{3}{4}\frac{3}{4}\sin^2 t}{\sqrt{9\left(1-\sin^2 t\right)}}\,\frac{3}{4}\cos t\right] \\
&= \frac{\frac{3}{4}}{3}P\left[\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\right] = 4P\left[\frac{\sin^2 t}{\sqrt{\cos^2 t}}\cos t\right] = 4P\sin^2 t \\
&= 4P\,\frac{1-\cos(2t)}{2} = 2\left[P\,1 - \frac{1}{2}P\left(2\cos(2t)\right)\right] = 2t - \sin(2t) + C,
\end{aligned}
$$

com $C \in \mathbb{R}$. Para retomar a variável x, atendemos a que $\sin t = \dfrac{4x}{3}$ e $\left(\dfrac{4x}{3}\right)^2 + \cos^2 t = 1$ (pela fórmula fundamental da trigonometria), o que é equivalente (para ângulos no 1^o quadrante) a $\cos t = \sqrt{1-\dfrac{16x^2}{9}}$. Obtemos então

$$
\begin{aligned}
P\frac{x^2}{\sqrt{9-16x^2}} &= 2t - 2\sin(t)\cos t + C = 2\arcsin\frac{4x}{3} - 2\frac{4x}{3}\sqrt{1-\frac{16x^2}{9}} + C \\
&= 2\arcsin\frac{4x}{3} - \frac{8x}{3}\sqrt{\frac{9-16x^2}{9}} + C \\
&= 2\arcsin\frac{4x}{3} - \frac{8x}{9}\sqrt{9-16x^2} + C,
\end{aligned}
$$

com $C \in \mathbb{R}$.