

# Modelação Financeira

Duarte Trigueiros

INDEG — ISCTE  
M. Sc. em Finanças Empresariais

© Copyright 1992

by

Duarte Trigueiros

Esta copia é fornecida sob condição de que quem a consultar reconhece que os direitos de autor permanecem da posse do autor e que nenhuma citação deste trabalho, nem nenhuma informação derivada dele, poderá ser publicada sem a prévia autorização escrita do autor.

# Introdução

O objectivo deste texto é proporcionar uma visão abrangente dos métodos computacionais mais necessários ao trabalho do gestor ou analista financeiros, sendo ao mesmo tempo um resumo prático e aprofundado de tópicos já abordados em outras disciplinas da mestrado. Os exemplos que se oferecem são inspiradores de um uso mais ousado e proveitoso dos métodos numéricos na empresa e em instituições financeiras. Esses exemplos baseiam-se nos excelentes livros de Benninga (1989) [4] e de Schlosser (1989) [34]. Nuns poucos de casos, o conteúdo foi modificados no sentido de um maior aprofundamento.

O aproveitamento por parte do aluno pressupõe um mínimo de familiariedade com os problemas estudados, nomeadamente a gestão financeira das empresas, a gestão de carteiras de títulos, Opções, Projectos de Investimento e outros. Também pressupõe o conhecimento de ferramentas informáticas comuns nas empresas, especialmente a folha de cálculo.

**Agradecimento:** Estes apontamentos beneficiaram das sugestões e críticas de muitas pessoas. Particularmente útil foi o trabalho de correcção e adequação à terminologia contabilística portuguesa que o Eng. José Nunes Maia tomou a seu cargo.

# Lista dos Exercícios

O curso que aqui se apresenta faz-se acompanhar de uma colecção de modelos desenvolvidos em folha de cálculo “123” da Lotus, facilmente adaptáveis a outros ambientes. Destes, alguns são exercícios: Carecem de ser completados pelos alunos. Outros são modelos prontos a funcionar. Em geral, por cada modelo pronto a funcionar existe também o correspondente exercício.

O nome dos ficheiros que contêm exercícios têm o prefixo MATE. As folhas de cálculo completas têm o prefixo MATT. Por exemplo, a folha de cálculo para o planeamento financeiro com sistemas de equações chama-se MATT1a-0.WK1. O exercício correspondente chama-se MATE1a-.WK1.

A lista de modelos ou dos exercícios correspondentes por capítulo, código (sufixo) e descrição encontra-se na tabela que ocupa esta página e a seguinte.

Capítulo	Código	Descrição
1	01-0	Planeamento Financeiro com Sistema de Equações
	01-1	O método de Gauss-Seidel
	02-0	Aquisições: O Preço de Compra
2	06-0	Familiarização com a Estatística das Cotações
	06-1	A Matriz de Variância-Covariância (macros)
	06-2	A Matriz de Variância-Covariância (matrizes)
	06-3	A Fronteira Eficiente de uma Carteira
	06-4	Carteiras Eficientes: O Exemplo de Roll
3	07-0	Determinação de Betas e da SML
	07-1	A Crítica de Roll ao CAPM

(*continua*)

Capítulo	Código	Descrição
4	08-0	Distribuições de Gauss e Lognormal
	08-1	Simulação de uma Distribuição de Gauss
	08-2	Simulação de Cotações
5	09-0	Padrões de “Payoff” de Combinações de Activos
	09-1	Implementação da Fórmula de Black-Scholes
	09-2	Estimação do Desvio-Padrão de uma Cotação
	09-3	Implementação do Modelo Binomial
	10-0	Um <i>Delta-Neutral Hedge</i>
6	05-0	Segurança de Carteiras: Bonds Equivalentes a Puts
	05-1	Segurança de Carteiras: Simulação
	05-2	Segurança dos Ganhos Totais
	05-3	Segurança de Carteiras: Cálculo Iterativo do $K$
	05-4	Puts Implícitas: O Valor Real do Activo
7	11-0	A Duração e a Cotação de uma Bond
	11-1	Duração: Fórmula Abreviada de Chua
	11-3	Bonds com um Período Irregular
	11-4	Imunização com Bonds e Carteiras de Bonds
	11-5	Imunização com Carteiras de Bonds (2. derivada)
	Outros:	11-6
	11-7	O método dos mínimos quadrados (matrizes)

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>iii</b>
<b>Lista dos Exercícios</b>	<b>iv</b>
<b>1 Planeamento Financeiro</b>	<b>1</b>
1.1 Modelos com Simultaneidade (Warren—Shelton)	2
1.1.1 Um Exemplo	3
1.1.2 Implementação	5
1.1.3 Discussão	10
1.1.4 Exercícios	13
1.2 Aplicação a Aquisições	13
1.2.1 Como Estimar o Preço de Compra	14
1.2.2 Ajuste do Custo do Capital Social	16
1.2.3 Cálculo do Valor Residual	17
1.2.4 Implementação	19
1.2.5 Exercícios	20
<b>2 Endividamento, Economia Fiscal e Leasing</b>	<b>22</b>
2.1 Capacidade de Endividamento: Um Só Período	23
2.2 Capacidade de Endividamento: Mais de Um Período	24
2.3 A Alternativa Compra—Aluguer	26
2.4 O Empréstimo Equivalente	28
2.5 Ajuste Directo da Análise Simplista	30
2.6 A Máxima Renda Aceitável	32
2.7 A Análise Financeira de Leases Alavancados	33

2.8	Exercícios . . . . .	37
<b>3</b>	<b>A Fronteira Eficiente de uma Carteira</b>	<b>39</b>
3.1	Introdução . . . . .	39
3.2	Valor Esperado e Variância de uma Carteira . . . . .	43
3.3	O Ganho Esperado e a Variância no Caso Geral . . . . .	45
3.4	As Carteiras Eficientes . . . . .	46
3.5	Exercício . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Os Betas, Incerteza e Robustez</b>	<b>52</b>
4.1	Um Teste do CAPM . . . . .	53
4.2	A Recta Valor-Mercado . . . . .	54
4.3	Será a Carteira do Mercado Meramente Eficiente? . . . . .	55
4.4	Betas e Robustez . . . . .	57
<b>5</b>	<b>O Comportamento Estatístico das Cotações</b>	<b>59</b>
5.1	A Distribuição Normal . . . . .	59
5.2	Caracterização Estatística das Cotações . . . . .	62
5.3	Os Processos de Difusão Multiplicativos . . . . .	65
5.4	Determinação dos Parâmetros de uma Distribuição . . . . .	66
5.5	Processos de Difusão . . . . .	68
5.6	A Simulação de Cotações . . . . .	72
5.7	Exercícios . . . . .	76
<b>6</b>	<b>O Valor das Opções</b>	<b>77</b>
6.1	Padrões de Lucro à Data de Expiração . . . . .	79
6.2	Os Factores que Influenciam o Preço das Opções . . . . .	82
6.3	A Equação de Black-Scholes: O Preço de uma Opção . . . . .	84
6.4	A Paridade Call-Put . . . . .	86
6.5	A Estimação da Volatilidade Implícita Num Preço . . . . .	87
6.6	Exercícios . . . . .	92
<b>7</b>	<b>A Segurança Dinâmica das Carteiras</b>	<b>94</b>
7.1	A Segurança de Carteiras de Activos Mais Complicados . . . . .	94
7.2	Uma Simulação: Segurança Dinâmica de Carteiras . . . . .	100

7.3	A Segurança de um Ganho Pré-Determinado . . . . .	105
7.4	Puts Implícitas e o Valor dos Activos . . . . .	110
7.5	Exercícios . . . . .	111
7.6	Outras Estratégias de Investimento com Opções . . . . .	112
7.6.1	Delta-Neutral Hedge . . . . .	112
7.6.2	Gama: Robustez de um Hedge . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Duração e estratégias de Imunização</b>	<b>116</b>
8.1	Duração . . . . .	116
8.2	A Duração e a Volatilidade dos Preços . . . . .	118
8.3	Fórmulas Abreviadas Para a Duração . . . . .	119
8.4	A Duração e o Ganho Até à maturidade (YTM) . . . . .	121
8.5	Calculo do YTM com Períodos Irregulares . . . . .	122
8.6	Estratégias de Imunização . . . . .	125
8.6.1	Um Exemplo . . . . .	127
8.6.2	Imunização com Carteiras de Bonds . . . . .	129
8.6.3	A Imunização de Segunda Ordem . . . . .	130
8.7	Exercícios . . . . .	132



# Capítulo 1

## Planeamento Financeiro

Depois de duas décadas de computadores pessoais e folhas de cálculo, é evidente que o planeamento financeiro e as projecções baseadas em números contabilísticos são um instrumento útil para a gestão financeira das empresas. Por exemplo, ao examinar Balanços ou Demonstrações de Resultados Previsionais, o gestor pode prever qual o financiamento necessário para assegurar a liquidez da sua empresa. Assim, ele consegue obter crédito em melhores condições ou tem tempo para tentar outras formas de financiamento. Neste contexto, as funções de “what if” simples ou com simulação, permitem estudar quais os pontos fracos da empresa face a diferentes cenários. O gestor pode portanto enfrentar situações incertas e preparar-se para todas as eventualidades previsíveis.

O uso de folhas de cálculo para a projecção de Balanços fica porém limitado aos modelos onde todas as variáveis podem ser deduzidas directamente a partir das vendas ou outro qualquer dado inicial. Construir modelos desta forma — apesar de se tratar de uma técnica tão espalhada — é ficar limitado à consideração de problemas muito simplificados.

1 Existem dois tipos bem conhecidos de modelos para planeamento financeiro, ambos com bases teóricas sólidas. Os métodos numéricos que requerem não estão, no entanto, ao alcance da forma simplificada de modelar referida acima. São eles:

- Modelos que assumem que a empresa deseja manter constante o rácio entre as dívidas a longo prazo e o capital: Ver-se-á ao longo desta lição que tal política implica que certas relações dentro do Balanço venham determinadas pela solução simultânea de um sistema de equações. No modelo original apresentado por Warren & Shelton (1971) [38], a empresa era representada por cerca de vinte equações que deviam ser

simultaneamente resolvidas.

- Modelos que maximizam o valor da empresa, sujeitos a um conjunto de condições: Veja-se a este respeito Myers & Pogue (1974) [28] e também as referências em Brealey & Myers (1981) [31].

O segundo tipo de modelos é mais elaborado do que o primeiro e tem bases teóricas mais sólidas também. Mas a forma como Warren-Shelton concebem o planeamento financeiro está muito mais espalhada. Neste capítulo iremos explorar os modelos de Warren-Shelton, mostrando como podem ser facilmente usados e procurando, paralelamente, chamar a atenção para a diferença entre dois tipos muito diferentes de dados.

## 1.1 Modelos com Simultaneidade (Warren—Shelton)

O modelo de Warren-Shelton baseia-se em dois pressupostos:

- As contas do Balanço podem derivar-se—directa ou indirectamente — das vendas.
- Uma preocupação sempre presente em qualquer empresa é manter um equilíbrio aceitável entre o exigível a longo prazo e os capitais próprios.

Dados estes pressupostos, a empresa prevê as suas vendas para o próximo ano (ou anos) e as taxas de juro que terá de pagar durante o mesmo período, sobre o montante da sua dívida a longo prazo. O modelo resolve-se achando a solução que satisfaz simultaneamente um conjunto de equações lineares que modelam o Balanço e a Demonstração de Resultados para esse período.

A introdução de simultaneidade nas relações financeiras previsionais é geralmente considerada como estando para além da capacidade das folhas de cálculo. Daí que os modelos de Warren-Shelton para planeamento financeiro sejam implementados em máquinas grandes, com recurso a linguagens de programação. Neste capítulo vai-se mostrar que quando o número de equações não é muito elevado, tais modelos podem facilmente ser implementados em micro-computadores.

A próxima secção apresenta um exemplo simples que contém todas as características essenciais dos modelos de Warren-Shelton. A secção 1.1.2 mostrará como esse exemplo pode ser implementado. Por fim, discutir-se-ão algumas questões complementares e apresentar-se-ão sugestões para exercícios.

### 1.1.1 Um Exemplo

A grande maioria dos modelos para planeamento financeiro são baseados na ideia de que as vendas condicionam tudo o resto. Isto é, assume-se, ao construir estes modelos, que as variáveis que fazem parte dos relatórios contabilísticos são uma função do nível de vendas da empresa. Por exemplo, os recebimentos podem modelar-se como sendo uma dada percentagem das vendas. Um caso mais complicado seria o do imobilizado líquido. Mas pode também modelar-se esta variável pressupondo que ela é uma função em escada:

$$\text{Imobilizado} = \begin{cases} a_1 & \text{se } \text{vendas} \leq A_1 \\ a_2 & \text{se } A_1 \leq \text{vendas} \leq A_2 \\ \vdots & \\ a_n & \text{se } A_{n-1} \leq \text{vendas} \leq A_n \end{cases}$$

Para resolver um modelo deste tipo é primeiro preciso distinguir quais as variáveis contabilísticas que são relações funcionais das vendas ou de outras variáveis, e quais as que são o resultado da política da empresa. O activo de um Balanço é geralmente tido como contendo apenas relações funcionais. O exigível a curto prazo pode também tomar-se como sendo deste tipo. Porém, a proporção entre a situação líquida e as dívidas a medio- longo-prazo, bem como a proporção de resultados líquidos pagos sob a forma de dividendos, é considerada como dizendo respeito à política da empresa.

- 2** Um caso simples é agora descrito. Desejamos prever as contas de uma empresa cujo nível de vendas actual (ano zero) é 1.000. Espera-se um crescimento de 10% ao ano sobre o referido nível. Além disso, a empresa previu as seguintes relações:

Rácio do activo circulante sobre as vendas	15%
Rácio do exigível a curto prazo sobre as vendas	8%
Rácio do imobilizado líquido sobre as vendas	77%
Rácio das custos, salvo juros e amortizações, sobre as vendas	80%

Tanto o imobilizado como as amortizações são trabalhosas de modelar. De momento usaremos o seguinte método muito simplificado para amortizar o imobilizado:

- A política da empresa consiste em amortizar todos os imobilizados ao longo de um único período de tempo de 10 anos.
- A amortização é linear, i.e., em linha recta.

- Os novos bens são comprados no fim de cada ano.
- A amortização acumulada para um dado ano calcula-se assim:

$$\text{Acumulada no ano } (t) = \text{acumulada no ano } (t - 1) + \frac{\text{imobilizado ao custo de } (t - 1)}{\text{média de vida}}$$

A empresa tem um exigível a longo prazo de 280 no ano zero e paga juros de 10,5% ao ano. O reembolso desta dívida é feito em parcelas iguais ao longo de 5 anos. Estima-se que o juro sobre novas dívidas a longo prazo que a empresa venha a contrair seja de 9,5%. O capital social (acções cotadas na Bolsa, aqui referidas como o *stock*) são 450 e a empresa reteve lucros no valor de 110 no ano zero. Finalmente esta empresa paga 47% de imposto sobre resultados.

3 A forma do Balanço e da Demonstração de Resultados que interessa considerar é:

Balanço		Vendas
Activo:	Passivo e SL:	
Activo circulante	Exigível a curto prazo	– custos
Imobilizado	Dívidas a longo prazo	– Juros
ao custo	Capital Social	– Amortização
amortização	Resultados retidos	<hr/>
líquido		Resultado antes de impostos
<hr/>	<hr/>	– Impostos
Total activo	Total Passivo e SL	Resultado depois de impostos
		– Dividendos
		<hr/>
		Aumento nos resultados retidos

Os números dados até aqui são suficientes para determinar o lado activo do Balanço bem como o exigível a curto prazo. Três variáveis restam por determinar: O acréscimo em capital social, aqui designado como “novo stock”, as novas dívidas a medio e longo prazo que a empresa irá contrair, e os dividendos em cada ano. Para determinar estas variáveis vamos ter de examinar a política financeira desta empresa.

É política da empresa tentar reduzir os actuais 50% de rácio entre o valor contabilístico das suas dívidas a longo prazo e o valor contabilístico do seu capital social para um máximo de 40%. Isto deveria conseguir-se gradualmente ao longo dos próximos 5 anos. Tal política impõe uma condição no modo como a empresa vai tentar financiar-se nesse período. É também política da empresa destinar 70% dos resultados a dividendos e reter os restantes 30%.

Estamos perante uma série de decisões que os gestores desta empresa sabem que podem implementar com algum sucesso, restando apenas descobrir a forma mais adequada de o fazerem. A missão do planeamento financeiro é, neste caso, o ajudar a decidir qual seja tal forma.

Vale a pena frisar que existem muitas outras características da empresa, nomeadamente as operacionais (margens, preços e custos por unidade, custos de mão de obra) que os mesmos gestores consideram como dados pois sabem que não está na sua mão modifica-las. Ver-se-á mais tarde porque razão é importante ter sempre presente a distinção entre estes dois tipos de características.

### 1.1.2 Implementação

As fórmulas que agora se apresentam implementam as condições descritas na secção anterior. Começar-se-á por descrever a parte mais simples do modelo, aquela que decorre directamente das vendas no ano zero sem necessidade de calcular valores referentes a anos projectados com recurso a anos anteriores.

Em primeiro lugar faça-se a parte do modelo que contém as constantes:

Vendas ano zero	1000	Dividas ano zero	280
Crescimento vendas	0.10 ao ano	Juro actual	0.105
		Juro futuro	0.095
Racio AC/V	0.15	Capital Soc. inic.	450
ECP/V	0.08	Result. ret. inic.	110
I/V	0.77	Impostos	0.47 sobre resultados
CUSTOS/V	0.80	Racio Dividendo	0.70 (payout)

Este quadro introduz também a terminologia adoptada para designar os rácios.

Vejam-se agora as fórmulas que podem ser implementadas imediatamente a partir destas constantes. As vendas projectadas podem ser calculadas a partir das vendas no ano zero. Daqui, e sabendo que a empresa tem no ano zero um total de 330 de amortizações acumuladas das quais 110 respeitantes a esse ano, podem logo calcular-se os resultados, os dividendos e a retenção para o ano zero. O activo circulante, o imobilizado e o exigível a curto prazo para esse ano calculam-se também a partir das vendas projectadas. É este um dos possíveis aspectos das principais fórmulas a implementar nesta fase:

$$\text{Vendas} = (\$VENDAS\ ZERO * (1 + \$VENDAS\ CRESC)^{ANO})$$

custos	+VENDAS*\$CUSTOS/V
Juros	+\$DIVIDA LP 0*\$JURO ACT (diferente nos anos seguintes)
Amortizacao	110
Resultado an imp	+VENDAS 0-CUSTOS 0-JUROS 0-AMORTIZ 0
Resultado dp imp	+RESULTADOS A IMP 0*(1-\$IMPOSTO %)
Dividendos	+RESULTADOS D IMP 0*\$DIVIDENDO %
Retencoes	+RESULTADOS D IMP 0-DIVIDENDOS 0
Activo circulante	+VENDAS*\$AC/V
Imobilizado:	
ao custo	+IMOB LIQ 0+AMORT ACUM 0
Amort acum	330
Liquido	+VENDAS*\$I/V
Exigivel c. p.	+VENDAS*\$ECP/V

Convém incluir desde logo um zero na coluna respeitante ao total de novas dívidas, ano zero. É também útil calcular os totais do activo e passivo. Vale a pena transportar os valores iniciais para as suas respectivas posições no Balanço, ano zero. Por último, devem preencher-se as células respeitantes ao rácio entre exigível a longo prazo e capital para os diversos anos, com os valores desejados. Como vimos, estes valores devem decrescer uniformemente ao longo do período de cinco anos: 50% no ano zero, 48% no ano 1, até atingir 40% no ano 5.

Depois disto o aspecto do modelo é o que se mostra na figura 1 (na página 7). Nesta fase, não convirá copiar para os anos seguintes as fórmulas que nesta figura não aparecem copiadas.

- 5 Vão-se agora introduzir as restantes fórmulas. A partir daqui o modelo deixa de mostrar valores definitivos logo depois da introdução de cada fórmula. Só no fim, com todas as fórmulas introduzidas e depois de recalculado várias vezes, é possível compará-lo com o resultado esperado.

Note-se que, ao contrário das fórmulas precedentes — que podiam ser escritas no ano zero e extrapoladas para os outros anos — estas devem ser escritas no ano 1. Alguns dos valores que aparecem no ano zero resultam das condições iniciais.

A figura 2 (página 9) é uma listagem das fórmulas usadas na coluna do ano 1.

Como se vê, o modelo supõe que todas as compras são feitas no final do ano 1 de forma que a sua amortização começa no ano 2.

		Anos: 0    1    2    3    4    5						
<b>Pressupostos:</b>		<b>Balanco:</b>						
Vendas ano zero	1000	Activo circul.	150	165	182	200	220	242
Crescimento vendas	0.10	Imobilizado						
Racio AC/V	0.15	ao custo	1100					
ECP/V	0.08	Amort. acumul.	330					
I/V	0.77	Liquido	770	847	932	1025	1127	1240
CUSTOS/V	0.80	Total activo	920	1012	1113	1225	1347	1482
Divida ano zero	280	Exigivel c. p.	80	88	97	106	117	129
Juro actual	0.105	Divida l. p.	280					
Juro futuro	0.095	Capital social	450					
Capital soc. inic.	450	Result. retidos	110					
Result. ret. inic.	110	Total pass+sl	80	88	97	106	117	129
Impostos	0.47							
Racio Dividendo	0.70							
		<b>Financiamento:</b>						
		Novo stock						
		Total novas div.	0					
		Racio divida/capital	48%	46%	44%	42%	40%	
		<b>Demonstracao de Resultados:</b>						
		Vendas	1000	1100	1210	1331	1464	1611
		Custos	800	880	968	1065	1171	1288
		Juros	29					
		Amortizacao	110					
		Result. an. imp.	61					
		Result. dp. imp.	32					
		Dividendos	22					
		Retencoes	10					

Figura 1: O modelo depois da introdução das constantes e das fórmulas mais imediatas — as que decorrem directamente das vendas.

O montante dos empréstimos a contrair é determinado pelo rácio desejado para o ano 1, como já se viu. 20% da dívida existente no ano zero (isto é, 1/5 da dívida a juros antigos) tem de ser paga no ano 1. Procede-se do mesmo modo para os quatro anos seguintes até ao total reembolso da dívida a juros antigos e pedindo emprestado (novo juro) o necessário para obedecer ao endividamento previsto.

Os resultados retidos adicionais são calculados na Demonstração de Resultados. Os resultados depois de impostos dependem da dívida total da empresa, a qual depende dos novos empréstimos a contrair, o qual depende do rácio dívida — capital a que se deseja chegar. Como se vê, há aqui uma definição “circular”: Fórmulas que se invocam a si próprias directa ou indirectamente.

6 A existência de circularidades é, neste modelo, desejável. As folhas de cálculo não deixam de recalculer todas as fórmulas mesmo quando estão em regime circular, permitindo a resolução simultânea deste sistema de equações por meio de sucessivas aproximações.

Os modelos originais, construídos por Warren & Shelton, obtinham a solução explicitamente, resolvendo simultaneamente todas as equações existentes no modelo. No nosso caso, a folha de cálculo usa recursão para obter o mesmo fim. Os métodos recursivos começam por aceitar uma solução inicial para as variáveis em presença e calculam o modelo com essa solução. Este cálculo leva, por sua vez, a um novo conjunto de valores que constitui uma segunda solução do sistema de equações, a ser usada no próximo cálculo e assim sucessivamente. De cada vez que o modelo é recalculado o valor das variáveis aproxima-se da solução real, uma vez que o valor actual de qualquer variável depende dos valores anteriores das outras. Por fim, o modelo “converge”, isto é, deixam de observar-se modificações nos valores das variáveis depois de cada vez que se recalcula. O resultado é um conjunto de valores óptimos para essas variáveis — aqueles valores capazes de anular a diferença entre os anteriores e os seguintes —. Tais óptimos são os zeros do sistema de equações.

No caso presente, o modelo final, depois de convergir, fica com os valores que se mostram na figura 3, na página 11.

**7. Gauss-Seidel:** Este método de resolução iterativa de equações é conhecido pelo nome de Gauss-Seidel. As condições de convergência encontram-se devidamente estudadas [18] e, no caso dos modelos para planeamento financeiro, é raro que esta convergência não se verifique. O número de iterações necessárias para a convergência costuma ser baixo. No caso em estudo, meia duzia de iterações é o máximo que se pode precisar.



	ANO 0	ANO 1	...
Balanco:			
Activo circul.	150	VENDAS ANO 1 * \$RACIO AC/V	
Imobilizado			
ao custo	1100	IMOB LIQ ANO 1 + AMORT ACUM ANO 1	
Amort. acumul	330	IMOB AO CUSTO ANO 0 * 0.1 + AMORT ACUM ANO 0	
Liquido	770	VENDAS ANO 1 * \$RACIO I/V	
Total activo	920	ACTIVO CIRC ANO 1 + IMOB LIQ ANO 1	
Exigivel c. p.	80	VENDAS ANO 1 * \$RACIO ECP/V	
Divida l. p.	280	RACIO DIV / CAPITAL ANO 1 * (CAPITAL ANO 1 + RESULTADOS RET ANO 1)	
Capital Social	450	CAPITAL ANO 0 + NOVO STOCK ANO 1	
Result. retidos	110	RESULTADOS RET ANO 0 + RETENCOES NO ANO 1	
Total pass+sl	920	SOMA	

Calculos:

Novo stock		TOT ACTIVO ANO 1 - EXIG CP ANO 1 - DIVIDA LP ANO 1 - RESULTADOS RET ANO 1 - CAPITAL ANO 0	
Tot. novas dividas 0		DIVIDA LP ANO 1 - \$DIVIDA LP ANO 0 * (1 - 0.2 * ANO)	
Racio divida/capital	0.48	...	0.40

Demonstracao de Resultados:

Vendas	1000	(\$VENDAS ZERO * (1 + \$VENDAS CRESC)^ANO)	
Custos	800	VENDAS ANO 1 * \$RACIO CUSTOS/V	
Juros	29	\$DIVIDA LP ANO 0 * (1 - 0.2 * ANO) *\$JURO ACT + T NOVAS DIVIDAS ANO 1 * \$JURO FUT	
Amortizacao	110	AMORT ACUM ANO 1 - AMORT ACUM ANO 0	
Result. an. imp	61	VENDAS ANO 1 - CUSTOS ANO 1 - JUROS ANO 1 - AMORTIZ ANO 1	
Result. dp. imp	32	RESULTADOS A IMP ANO 1 * (1 - \$TAXA DE IMPOSTO)	
Dividendos	22	RESULTADOS D IMP ANO 1 * \$DIVIDENDO%	
Retencoes	10	RESULTADOS D IMP ANO 1 - DIVIDENDOS ANO 1	

Figura 2: Fórmulas para o ano 1.

A equação que determina o stock é um bom exemplo da recursão existente neste modelo. O stock, num dado ano, é a soma do stock no ano anterior com o novo stock emitido nesse ano. O novo stock é definido em termos de outras variáveis do Balanço: Os resultados retidos no presente ano, as dívidas contraídas até esse ano e outros. Estas variáveis, por sua vez, são funções de outras, tanto no Balanço como na Demonstração de Resultados. No fim, veríamos que se dá uma extensa circularidade. O capital social depende do novo stock, que depende dos resultados retidos, que dependem da retenção, que depende dos resultados depois de impostos, que depende do serviço da dívida, que depende da dívida, que depende, por sua vez, do capital social para que se mantenha um dado rácio entre as duas formas de financiamento.

### 1.1.3 Discussão

Em primeiro lugar é interessante notar que o modelo desenvolvido, apesar do seu aspecto clássico, é muito diferente dos habituais modelos para planeamento financeiro. Em vez de uma sequência causal uni-direccional onde cada variável só influencia as que se encontram a jusante na referida sequência, aqui cada variável irá influenciar todas as outras. Como resultado, este modelo permite certas funções muito úteis em planeamento: Por exemplo, é possível fixar objectivos — neste caso, uma dada estrutura financeira — e calcular os valores das variáveis que os permitem obter. Trata-se portanto de uma forma de “goal seeking”, mas mais geral e versátil.

Além disso, esta forma de modelar a empresa aproxima-se mais da realidade. Isto é, um sistema de equações é capaz de reproduzir com mais rigor a forma como as empresas funcionam na realidade. Com efeito, a ideia de que os mecanismos internos das empresas são uni-direccionais é uma simplificação grosseira: Existem, nas empresas, diversas formas de “feedback”.

8 Uma vez terminado, o modelo deve ser explorado com vistas a uma melhor compreensão das finanças da empresa e de como estas respondem a diversos cenários. Brealey & Myers [31] contém, no capítulo 26, uma interessante reflexão sobre o papel do planeamento financeiro. O modelo aqui desenvolvido é uma representação altamente simplificada daquilo que realmente acontece numa empresa onde a política financeira fosse a enunciada. Aplicações deste modelo ao mundo real requerem um maior detalhe e um maior conhecimento de como a empresa trabalha. As formas mais óbvias de tornar o modelo realista seriam:

		Ano: 0 1 2 3 4 5						
<b>Pressupostos:</b>		<b>Balanco:</b>						
Vendas ano zero	1000							
Crescimento vendas	0.10	Activo circul.	150	165	182	200	220	242
		Imobilizado						
Racio AC/V	0.15	ao custo	1100	1287	1500	1744	2020	2335
ECP/V	0.08	Amort. ac.	330	440	569	719	893	1095
I/V	0.77	Liquido	770	847	932	1025	1127	1240
CUSTOS/V	0.80	Total activo	920	1012	1113	1225	1347	1482
Divida ano zero	280	Exigivel c. p.	80	88	97	106	117	129
Juro actual	0.105	Divida l. p.	280	300	320	342	364	387
Juro futuro	0.095	Capital social	450	502	561	628	704	791
Capital soc. inic.	450	Result. retidos	110	123	136	149	162	175
Result. ret. inic.	110	Total pass.+sl	920	1012	1113	1225	1347	1482
Impostos	0.47							
Racio Dividendo	0.70							
		<b>Financiamento:</b>						
		Novo stock		52	59	67	76	87
		Total novas div.	0	76	152	230	308	387
		Racio divida/capital	48%	46%	44%	42%	40%	
		<b>Demonstracao de Resultados:</b>						
Vendas	1000	1100	1210	1331	1464	1611		
Custos	800	880	968	1065	1171	1288		
Juros	29	31	32	34	35	37		
Amortizacao	110	110	129	150	174	202		
Result. an. imp	61	79	81	83	83	83		
Result. dp. imp	32	42	43	44	44	44		
Dividendos	22	29	30	31	31	31		
Retencoes	10	13	13	13	13	13		

Figura 3: O modelo depois de terminado.

**Financiamento simplificado:** A empresa pode não estar habilitada a vender novo stock nos próximos anos. Nesse caso, todo o financiamento terá de vir do endividamento. No modelo, isto significa uma simplificação.

**Dívida a curto prazo:** Neste modelo pressupõe-se que a empresa não paga juros pelo exigível a curto prazo. Em certos casos seria conveniente partir este exigível em duas parcelas, uma contendo a conta de fornecedores e outra os empréstimos bancários de curto prazo. Estes últimos pagam juros.

**Activo circulante:** Também pode ser interessante em certos casos explicitar as diversas contas do activo circulante:

**Clientes,** pode ser modelado como uma função linear das vendas.

**Existências:** A acreditar nas fórmulas que a Investigação Operacional fornece, o valor óptimo das existências cresce com a raiz quadrada das vendas (ver Baumol [3], capítulo 1). O resultado é que as existências que minimizam os custos vêm dadas por

$$I = \sqrt{2aQk}$$

onde  $a$  é um custo fixo,  $k$  é um custo por unidade e  $Q$  é o nível das vendas.

**Caixa,** pode ser modelado de modo a que a firma retenha uma dada liquidez e aplique alguns excessos a curto prazo. Porém, a relação entre esta conta e as vendas não é simples de modelar (ver Brealey & Myers [31], capítulo 29).

**Um modelo separado para o imobilizado:** O imobilizado pode — e, na vida real, deve — ser objecto de maior detalhe. É costume construir um modelo separado onde cada grupo de bens imóveis, maquinaria, veículos, etc., da empresa são modelados em termos das vendas e amortizados da forma mais apropriada. Porém, convém ter presente que a modelação do imobilizado levanta problemas de outro tipo (ver Benninga (1989) [4] para uma introdução e bibliografia).

Para terminar, recorde-se que, como regra, quanto mais detalhe se introduz num modelo, mais pressupostos acerca do futuro terão de ser feitos e mais falível ele se torna. É geralmente melhor um modelo simples cujas omissões e aproximações são conhecidas, do que um outro muito complicado onde a ideia importante desaparece no meio do bosque intrincado de detalhes.

#### 1.1.4 Exercícios

9. Construir o modelo descrito neste capítulo assumindo que o exigível a curto prazo não tem qualquer papel a desempenhar.

10. A empresa está impossibilitada de aumentar o seu capital emitindo novo stock. Se a administração decidir não pagar dividendos, o que irá acontecer ao rácio da dívida com o capital próprio? Qual seria a taxa de crescimento das vendas necessário para que este rácio não excedesse o valor de 60%?

11. O modelo desenvolvido supõe que as dívidas são contraídas no início do ano e que o pagamento de juros é também feito no início do ano. Porém, este mesmo modelo supõe que a compra de novos activos é feita no fim do ano. Construir um modelo onde o juro é pago no fim do ano e as novas dívidas são contraídas no fim do ano também.

12. Considere-se a seguinte variação do modelo proposto no segundo exercício: O activo circulante está dividido em duas contas. Uma, que se supõe valer apenas o suficiente para permitir as vendas. Outra é a caixa. Façam-se também as seguintes modificações: A empresa não amortiza as dívidas; o juro a pagar é o mesmo para novas dívidas ou para as antigas (9,5%); o rácio do imobilizado líquido para as vendas é de 0,65; a empresa coloca os resultados retidos na conta de caixa e consegue 8,5% ao ano sobre este dinheiro.

13. Escolher uma empresa onde se teve acesso aos relatórios contabilísticos dos últimos 10 anos. Tentar estabelecer uma relação entre a conta vendas e as outras principais contas, baseada nos primeiros 5 anos desse conjunto. Construir um modelo baseado nessa relação e testar a sua adequação à empresa vendo se ele é capaz de explicar satisfatoriamente os últimos 5 anos — os que não foram usados para construir o modelo.

## 1.2 Aplicação a Aquisições

O modelo desenvolvido no capítulo 1 pode ser usado — depois de algumas pequenas modificações — para analisar uma aquisição. A empresa interessada em comprar outra precisa de saber o preço a pagar. Tal preço dependerá dos meios que se prevê a empresa adquirida irá libertar durante o período que durar a aquisição e do seu valor residual. Vamos chamar

“Hold & Suck” à empresa em vias de adquirir outra. A empresa que Hold & Suck cobiça chamar-se-á “Honey” neste estudo.

### 1.2.1 Como Estimar o Preço de Compra

Honey parece ser uma boa compra devido ao seu reputado grupo de gestores, boas perspectivas de venda para os seus produtos, resultados estáveis e potencial de crescimento. A única questão a resolver é: Qual o preço a pagar pela Honey? Este estudo lembrará o que a teoria financeira tem a dizer sobre tal assunto e depois mostrará como implementar, na prática, os cálculos necessários.

14 O preço de compra calcula-se descontando uma estimativa dos meios libertos durante o período que durar a aquisição, mais o preço de venda subsequente. A taxa à qual este caudal de *cash* é descontada deve ajustar-se para contemplar os riscos da operação, tanto os do negócio como os financeiros.

São estas as hipóteses que os analistas do Hold & Suck aceitam à partida:

- Honey será retida durante cinco anos e vendida depois de recolhidos os dividendos do quinto ano.
- Depois de adquirida, a Honey continuará como uma empresa independente. Porém, Hold & Suck possuirá 100% do seu capital social.
- São estes os rácios esperados para a Honey durante os cinco anos que dura a intervenção: 

{	Activo circulante / Vendas	32%	Além disso, a
	Exigível a curto prazo / Vendas	10%	
	Imobilizado Líquido / Vendas	60%	
	Custos, amortizações, enc. financeiros / Vendas	80%	

taxa de imposto sobre os resultados é 40%. Assim, sobram 60% para dividendos.
- As dívidas a longo prazo da Honey são de 4.522 e o juro é de 10%. Espera-se que este juro se mantenha estável durante os cinco anos que dura a compra.
- Qualquer novo financiamento que a Honey venha a precisar terá de vir do recurso ao crédito pois o Hold & Suck não contempla a hipótese de partilhar o capital social da Honey com mais ninguém.
- Quaisquer novos bens que se venham a comprar serão amortizados ao longo de 10 anos. A sua compra dar-se-á sempre no início do ano. Assim, a amortização incremental



será baseada no custo total desses bens para o mesmo ano. Notar que isto é um pouco diferente do que se supôs para o modelo do capítulo 1 onde tal amortização se baseava no custo de bens para o ano anterior.

- Os cash-flows futuros que se prevê deslizar para os cofres do Hold & Suck devido a esta compra serão descontados ao custo do capital social da Honey. Esta taxa reflecte o risco associado à posse de capital de Honey. Mas tanto o risco do negócio como o risco financeiro existente devido à alavancagem da Honey devem ser contemplados ao calcular este custo.

Na próxima secção discutir-se-á o método a usar para ajustar o custo do capital social da Honey de modo a integrar as suas dívidas.

### 1.2.2 Ajuste do Custo do Capital Social

Os analistas do Hold & Suck usam o teorema de Modigliani-Miller para ajustar o custo do capital social da Honey de modo a que reflecta as dívidas desta empresa. Se a Honey não tivesse dívidas a longo prazo o seu capital social custaria 14%. Mas com dívidas, o formalismo referido acima diz que este custo deverá ser dado por

$$k_E(L) = k_E(U) + [k_E(U) - i] \frac{D}{E} (1 - T) \quad (1)$$

em que  $k_E(U)$  é o custo do capital social caso a empresa não tivesse dívidas (o “U” vem de *unleveraged*),  $k_E(L)$  é esse custo ajustado para alavancagem (o “L” vem de *leveraged*),  $i$  é o juro actual que as dívidas da empresa pagam no mercado,  $D$  é o valor actual que o mercado atribui às dívidas da empresa,  $E$  (*Equity*) é o valor actual que o mercado atribui ao capital social da empresa e  $T$  é a taxa de imposto que a empresa paga. Os analistas estão cientes de que esta fórmula representa um conjunto de simplificações e compromissos. Por exemplo, a análise de Miller e Modigliani pressupõe um caudal de *cash* ininterrupto e de duração ilimitado; crescimento zero; ausência de impostos sobre os rendimentos pessoais. Ver, no capítulo 19 de Brealey & Myers [31], uma discussão sobre as aproximações desta fórmula e suas consequências.

Outro compromisso importante que os analistas do Hold & Suck têm que aceitar é o uso dos valores contabilísticos de  $E$  e  $D$  em vez dos valores ditados pelo mercado. De facto, a Honey não está cotada em nenhum mercado e portanto desconhece-se quanto estariam os investidores dispostos a pagar por estes bens.



### 1.2.3 Cálculo do Valor Residual

Um dos mais difíceis problemas que os analistas do Hold & Suck enfrentam é a estimação do valor residual da Honey no fim do período de compra de cinco anos. Eles aceitam que o valor do seu capital social e dívidas seja, no mercado, dado pelo valor actual do caudal de *cash* liberto pela empresa no futuro. Em tal caso, o valor residual seria calculado pela *perpetuidade*

$$v_5^r = \frac{(1 - T)(1 + g)(\text{Vendas}_5 - \text{Custos}_5 - \text{Amortizações}_5)}{k_a - g} \quad (2)$$

em que  $k_a$  seria a média ponderada do custo do capital da Honey no ano 5 e  $g$  a taxa de crescimento das vendas. Esta fórmula pressupõe que a venda se efectua depois de se recolherem os dividendos do ano 5. Uma perpetuidade projecta por tempo ilimitado um dado fluxo de dinheiro. A expressão acima foi obtida pressupondo que o valor da Honey no mercado é o valor actual de um fluxo de caixa que se prolonga perpetuamente:

$$v_5^m = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1 - T)(1 + g)^t (V_5 - D_5 - A_5)}{(1 + k_a)^t}$$

De notar que a fórmula (2) só se pode aplicar quando  $k_a \neq g$ . A análise acima não é porém a única possível. Ela surge como uma extensão do teorema de Modigliani-Miller. De acordo com os pressupostos deste teorema, o valor no mercado de uma empresa é o valor dos seus cash-flows descontados a uma taxa que seja a média ponderada do custo do seu capital. Quando o crescimento da empresa é levado em conta, parte-se do princípio de que, a partir do ano 5, o caudal de *cash* liberto pela Honey crescerá a uma taxa igual à das suas vendas. Dado o montante previsto para o valor da empresa no mercado, o valor do seu capital social no ano 5 será

$$v_5^E = v_5^r - v_5^D$$

em que  $v_5^D$  é o valor das dívidas da empresa no ano 5. Este montante terá que ser descontado ao custo do capital social da Honey no ano 5 para dar o valor actual ao qual Hold & Suck deve vender a sua presa.

**15** Ainda falta obter uma estimativa para  $k_a$ , a média ponderada do custo do capital da Honey. Para tal, pode usar-se a conhecida fórmula:

$$k_a = \frac{E}{E + D}k_E(L) + \frac{D}{E + D}i(1 - T) \quad (3)$$

Calculo do Valor da HONEY

	0	1	2	3	4	5 ano	
D	5522	6044.8	6631.7	7290.3	8029.6	8859.4	
E	3678	3891.1	4099.1	4299.0	4486.8	4658.3	
D/E	1.50	1.55	1.62	1.70	1.79	1.90	
D/E (1-T)	0.9008	0.9321	0.9706	1.0174	1.0737	1.1410	
$k_e (L)$	0.1760	0.1772	0.1788	0.1806	0.1829	0.1856	
E/(E+D)	0.3997	0.3916	0.3819	0.3709	0.3584	0.3446	
D/(E+D)	0.6002	0.6083	0.6180	0.6290	0.6415	0.6553	
$k_a$	0.1063	0.1059	0.1053	0.1047	0.1040	0.1032	
			Valor residual 5			40429	
			Total Divida 5		-	8859	
						=====	
			Valor do capital social no ano 5:			31569	
			Valor actual do capital social no ano 5:			13736	
			Valor actual dos			Total	
			dividendos:	272	225	183	145
						112	937
							=====
			Preco a pagar pela empresa:				14673

Figura 5: A partir do Balanço e da Demonstração de Resultados previsionais da Honey é possível prosseguir com os cálculos até obter o preço a pagar pela empresa.

onde  $k_E(L)$  e  $i$  são, respectivamente, o custo do capital social (alavancado) e o das dívidas da Honey. O custo do capital social reflecte, como vimos, tanto o risco do negócio como o risco financeiro. É calculado com a ajuda de (1) e deveria ser modificado todos os anos de modo a captar mudanças nestes factores. Porém, os analistas do Hold & Suck consideram que o risco do negócio é constante e acham, como vimos, que a fórmula de Modigliani-Miller é aceitável para avaliar o risco financeiro.

Tanto  $E$  como  $D$  deveriam ser os valores que o mercado de capitais atribui, não os contabilísticos. Porém, é frequente que seja impossível aceder aos primeiros.

### 1.2.4 Implementação

Vai-se agora proceder à modificação do modelo usado no capítulo 1 e dos cálculos que conduzem a uma estimativa do preço de compra. Em primeiro lugar, note-se que os rácios da empresa e as demais constantes são outras:

Racios: A CIRC / V	0,32	E CP / V	0,10
I / V	0,60	CUSTOS / V	0,80
Vendas ano zero	10000	Crescimento vendas	0,08 ao ano (g)
Divida ano zero	4522		
Juro actual	0,100	Este e' o valor (i) das dividas da empresa	
Rendibil. cap. soc.	0,140	Esta taxa reflecte apenas o risco do negocio	
Capital soc. inic.	2000		
Resultado rt. inic.	1678		
Impostos	0,40	(1-T) = 0,6	
Racio Dividendo	0,60	(payout ratio)	

16 Note-se também que aqui, em vez de um rácio constante entre a dívida e o capital social, o que existe é um valor constante para o capital social. As dívidas a contrair serão as necessárias para financiar a empresa. Depois destas modificações, o Balanço e Demonstração de Resultados previsionais da Honey seriam os que se podem ver na figura 4, na página 15.

Para obter este modelo, as dívidas são calculadas de modo a equilibrarem o Passivo. Notar que os juros são mais simples do que no modelo original. No fim desta fase os analistas ficam de posse de uma previsão dos meios libertos, de  $D$  e de  $E$  para os cinco anos, e podem portanto prosseguir no cálculo do preço a oferecer pela Honey, bastando para isso aplicarem os conceitos desenvolvidos acima. Este cálculo pode assumir o aspecto da figura 5, na página 18, o qual fala por si. Convirá talvez recordar que um cash-flow do ano  $N$  tem um valor actual que se pode calcular com a fórmula

$$\text{NPV}(C_N) = \frac{C_N}{(1 + v_1)(1 + v_2) \cdots (1 + v_N)}$$

Esta expressão será precisa, tanto para determinar o valor actual do capital social da Honey no ano 5, como para descontar os seus dividendos até essa data. Em folhas de cálculo é fácil concatenar produtos de modo a que sejam calculados elegantemente.

**17. Análise de Sensibilidade:** Note-se ainda que os dividendos foram tomados, neste caso, como os meios que interessa considerar como libertos durante os cinco anos da compra. Vai-se agora estudar o efeito que uma política de dividendos diferente teria no preço de compra da Honey. Para isso, far-se-á uma análise de sensibilidade deste preço a variações de 0 a 1 no rácio de dividendos. Esta é a tabela que se obtém:

Payout	Valor	Payout	Valor	Payout	Valor
0	10835	0.4	13303	0.8	16123
0.1	11416	0.5	13974	0.9	16886
0.2	12024	0.6	14668	1	17671
0.3	12653	0.7	15384		

O valor da empresa cresce com o *payout* porque, na presença de impostos, as vantagens da alavancagem (*tax shields*<sup>1</sup>) são maiores com altos dividendos que requeiram recurso ao crédito para serem pagos. Dada uma taxa de crescimento constante para as vendas, quanto mais dividendos estivermos dispostos a pagar, mais dinheiro é preciso pedir emprestado. Isto faz com que os *tax shields* aumentem também e com elas o valor da empresa. Em princípio, a saída de capitais sob a forma de dividendos deveria diminuir o valor da empresa.

### 1.2.5 Exercícios

18 Se o preço residual da empresa a adquirir for o mesmo que o preço de compra a pagar agora por ela, qual seria este preço de compra?

19 Todo o modelo acima se baseia na ideia de que o valor residual de uma empresa se calcula a partir do valor actual dos seus cash-flows futuros. Calcular agora o valor residual quando se assumem quaisquer das duas hipóteses abaixo em vez daquela que desconta cash-flows futuros.

1. Aceitar que o valor residual do capital social da empresa seria dado pelo seu valor líquido contabilístico, i.e., o Stock somado aos resultados retidos.
2. Aceitar que o valor residual da empresa é igual aos seus resultados durante os cinco anos a multiplicar por um dado factor. Isto pode ser conveniente para quem acreditar que os investidores calculam o valor de um stock multiplicando por um dado factor os resultados por acção. Usar 10, 50 e 20 como factores.

---

<sup>1</sup>Literalmente, protecção ou escudo feito com os impostos.

- 20** Fazer uma análise de sensibilidade e calcular o valor da Honey para taxas de crescimento das vendas entre 1 e 15%. Usar Data Table 1. Repetir a análise com Data Table 2, fazendo variar tanto o rácio de dividendos como a taxa de crescimento das vendas.
- 21** Em muitos casos, quando uma empresa é vendida por um preço superior ao seu valor contabilístico, o excesso é atribuído ao imobilizado da empresa ou ao goodwill. Este movimento irá originar maiores amortizações. Corrigir o modelo acima de modo a reflectir tal atribuição.

## Capítulo 2

# Endividamento, Economia Fiscal e Leasing

O efeito que o endividamento tem no valor das empresas é uma fonte de perplexidade para os teóricos da estrutura financeira. As principais questões em aberto são saber se a existência da dívida faz alguma diferença para o valor da empresa, qual o efeito sobre o custo do capital social de um aumento na dívida e se os impostos — tanto pessoais como os que a empresa paga — modificam o panorama anterior. Estas e outras questões não se podem considerar de modo nenhum resolvidas.

Uma forma de ganhar sensibilidade para estes problemas é tentar resolver um caso concreto. Este capítulo estuda primeiro o problema de saber quanto uma empresa estaria em condições de pedir emprestado contra *inflows* futuros. Resolvida tal questão, o capítulo mostrará uma aplicação a *leases*, começando por explorar o ponto de vista do *lessee* e depois o do *lessor*. Estudar-se-á em primeiro lugar a alternativa compra-aluguer. A seguir, determinar-se-á a máxima renda aceitável. A análise dos *leases* alavancados e os problemas contabilísticos que levantam concluirão este estudo.

Um *lease* é um contrato pelo qual o dono de um activo — o *lessor* ou locador — o aluga a outra pessoa — o *lessee* ou locatário. Existem muitas modalidades de contratos para leasing. Aqui, explorar-se-á um tipo concreto apenas, o mais simples. A finalidade é mostrar o tratamento quantitativo destes problemas. Assim, parte-se do princípio de que os *leases* estudados são a longo prazo: O activo alugado passa a maior parte da sua vida útil com o *lessee*. Portanto, para o locatário, o *lease* aparece como alternativa à compra.

## 2.1 Capacidade de Endividamento: Um Só Período

Suponha-se que alguém sabe com certeza que, dentro de um ano, irá receber 11.000. Se os bancos estiverem a emprestar dinheiro a uma taxa de 10%, esse alguém poderia conseguir, desde já, 10.000 adiantados sobre os 11.000 que vai receber dentro de um ano. De facto, 11.000 certos dentro de um ano valem 10.000 já. Porém, este raciocínio é simples demais.

**22. Economia Fiscal:** Na realidade, quando as perspectivas são de receber, por exemplo, 100.000 dentro de um ano, seria possível obter-se junto de um banco 95.419,85 ao juro de 8%, em vez dos 92.592,59 que estariam disponíveis de acordo com o raciocínio anterior. Veja-se porquê: O valor a pagar no próximo ano seria

$$95.419,85 \times 1,08 = 103.053,44.$$

O juro pedido por este empréstimo,

$$103.053,44 - 95.419,85 = 7.633,59$$

é reconhecido como custo para efeitos fiscais. Assim, ao contrair o empréstimo e ao usá-lo para financiar um projecto, obtém-se uma redução nos impostos a pagar. Esta redução é uma entrada em caixa e tem o valor — caso o imposto seja de 40% — de

$$0,4 \times 7.633,59 = 3.053,44 = \text{Economia Fiscal}$$

Estes 3.053,44 são o montante que se ganha pelo facto de se pagar menos impostos ao recorrer ao crédito em vez de a capitais próprios. Portanto, no fim do ano, é possível pagar-se ao banco que concedeu o empréstimo, juntando os 100.000 que nessa altura se recebem com os 3.053,44 que se ganha pelo facto de recorrer ao crédito.

O montante do empréstimo, os 95.419,85, é a capacidade para contrair dívidas criada pelo projecto ou simplesmente a *capacidade marginal de endividamento*. Os cálculos feitos correspondem à fórmula

$$\text{Capacidade para contrair dívidas} = \frac{\text{Pagamento prometido dentro de 1 ano}}{1 + (1 - \text{Taxa de imposto}) \text{Taxa de juro}}$$

É fácil de verificar que a sua aplicação conduz aos valores obtidos acima.

## 2.2 Capacidade de Endividamento: Mais de Um Período

Vão-se agora generalizar os resultados acima. Se, por exemplo, um projecto liberta 300.000 dentro de um ano e 200.000 dentro de dois anos, qual será capacidade para contrair dívidas assim gerada?

Vai-se proceder do futuro para o passado. Dentro de um ano, tendo já recebido os 300.000 iniciais, o projecto poderia ainda pedir um empréstimo sobre os 200.000 que iria receber no ano seguinte. A capacidade para contrair dívidas assim criada chamar-se-á  $DB_2$ . Ela seria:

$$DB_2 = \frac{200.000}{1 + (1 - 0,4) 0,08} = \frac{200.000}{1,048} = 190.839,69$$

O projecto será pois capaz de pedir emprestado 190.839,69 dentro de um ano. Mas quanto é que é possível pedir já, com base nos meios libertos futuros? Vamos chamar  $DB_1$  a este montante.  $DB_1$  é a capacidade criada pelo projecto no início do ano 1 (o ano 1 começa já; o ano 2 começa de hoje a um ano).

Este valor calcula-se assim: Se o projecto pede emprestado  $DB_1$  já, a saída de caixa (outflow) devida ao pagamento de juros será, dentro de um ano,  $(1 - 0,4) \times 0,08 \times DB_1$  ou seja  $0,048 \times DB_1$ . Note-se que se entrou em conta com o chamado *tax shield*, a economia fiscal obtida com a diminuição nos impostos pelo facto dos juros serem considerados como custos. No final do ano 1, o banco vai querer que o projecto amortize a dívida de modo a que ela seja apenas 190.839,69. De facto, este é o valor correspondente à capacidade para contrair dívidas do projecto nessa data. Portanto, o banco quererá receber de volta um montante que é  $DB_1 - 190.839,69$ . A saída de caixa (outflow) que o projecto vai ter de enfrentar no fim do ano 1 será pois

$$DB_1 - 190.839,69 + (1 - 0,4) \times 0,08 \times DB_1.$$

Convirá lembrar que o pagamento de amortizações de dívidas não é um custo para efeitos fiscais.

Para financiar o outflow acima, o projecto tem os 300.000 prometidos para o fim do primeiro ano. Portanto, o cálculo de  $DB_1$  consistirá apenas em resolver a equação

$$DB_1 - 190.839,69 + (1 - 0,4) \times 0,08 \times DB_1 = 300.000$$

em ordem a  $DB_1$ . Isto dá  $DB_1 = 468.358,49$ . É essa a capacidade para contrair dívidas que o projecto tem hoje.



23 Vejamos se bate certo. Hoje, o projecto pede emprestado 468.358,49. Dentro de um ano dão-se os seguintes cash-flows devido a esta dívida:

Juros:	$468.358,49 \times 0,08 =$	$37.468,68$
<i>Economia fiscal</i> sobre os juros:	$-37.468,68 \times 0,4 =$	$-14.987,47$
Reembolso da dívida:	$468.358,49 - 190.839,69 =$	$277.518,80$
Pagamento líquido:		<u><math>300.000,01</math></u>

Excepto por um erro de arredondamento, era isto o que se pretendia. O projecto cria uma capacidade para contrair dívidas de 468.358,49 já, e de 190.839,69 dentro de um ano.

24 Não é difícil deduzir a expressão analítica da capacidade de endividamento. No caso de dois anos, a fórmula que a permite calcular seria

$$DB_1 = \frac{\text{Pagamento no ano 1} + DB_2}{1 + (1 - \text{Tx imposto}) \times \text{Tx juro}} = \frac{P_1}{1 + (1 - T) i} + \frac{P_2}{(1 + (1 - T) i)^2}$$

e pode obviamente implementar-se o mesmo raciocínio para um número qualquer de anos. O resultado é

$$DB_t = \sum_{j=1}^{N-t} \frac{\text{Pagamento no ano } (t+j)}{[1 + (1 - T) i]^j} \quad (4)$$

que coincide com a fórmula do valor actual onde, em vez do custo da oportunidade  $i$ , se usa  $(1 - T)i$ . Por exemplo, no caso da folha de cálculo 123, a função @NPV ( $i(1 - T)$ , Pagamento 1, ..., Pagamento N) implementa a fórmula acima.

25 Considere-se o seguinte exemplo: Uma companhia vai receber 14.720 líquidos no fim de cada ano, durante os próximos dez anos. Qual é a capacidade para contrair dívidas criada por este caudal de dinheiro quando a taxa de juro é de 8% e os impostos são de 33%?

A folha de cálculo que se obtém, quer pela repetição dos raciocínios explicados na secção 2.2, quer pela simples aplicação da fórmula (4) teria este aspecto:

Ano	DB (t)	r DB (t)	Tr DB (t)	Pagamentos	Tx. de Juro	Impostos
1	111702,74	8936,22	2948,95	14720,00	0,08	0,33
2	102970,01	8237,60	2718,41	14720,00		
...	...			...		
9	27231,54	2178,52	718,91	14720,00		
10	13971,15	1117,69	368,84	14720,00		

Porém, caso se apliquem sucessivamente os raciocínios desenvolvidos na secção 2.2, a mesma fórmula serve para proceder ao somatório e ao cálculo da capacidade. Se, por

hipótese, a coluna C é a que contém o cálculo da capacidade e a coluna F contém os pagamentos, seria:

Linha	Ano	Formula de DB (t)
...	...	
11	6	$+C12/(1+\$TX \text{ JURO}*(1-\$IMPOSTO))+F11/(1+\$TX \text{ JURO}*(1-\$IMPOSTO))$
12	7	$+C13/(1+\$TX \text{ JURO}*(1-\$IMPOSTO))+F12/(1+\$TX \text{ JURO}*(1-\$IMPOSTO))$
...	...	

Como se vê, quando a capacidade é calculada “para trás”, isto é, partindo do futuro para o passado, não é preciso achar expoentes. Claro que o exemplo acima é apenas uma curiosidade. Na prática, é mais expedito usar a fórmula (4). Porém, o modo de trabalhar descrito acima tem aplicação prática em outras situações importantes e merece ser recordado.

## 2.3 A Alternativa Compra–Aluguer

No exemplo que se irá explorar, uma empresa estuda qual a melhor entre duas alternativas: O aluguer ou a compra de equipamento. Vai-se supôr que os meios libertos devido ao uso desse equipamento não dependem de quem é o seu dono. Isto implica que a empresa é responsável pela manutenção do equipamento, quer ele seja comprado, quer seja alugado; e ainda, que o aluguer não aumentará nem diminuirá nenhuns outros custos operativos.

A análise deste capítulo vai centrar-se nos meios libertos. Supõe-se que o locador paga impostos sobre o resultado do aluguer e portanto consegue uma *tax shield* (economia fiscal) com a amortização do activo alugado. Também se supõe que o locatário pode chamar custo à renda que paga pelo activo alugado. Isto é, as autoridades fiscais tratam o locador como o dono do activo. Convirá recordar que tal pressuposto não é totalmente pacífico. Certas questões contabilísticas e de legislação serão omitidas deste estudo mas podem ser consultadas nos livros ou artigos referenciados em bibliografia. Recomendam-se os seguintes textos: Ofer (1976) [30], McConnell & Schallheim (1983) [26], Levy & Sarnat (1979) [22] e Copeland & Weston (1982) [13].

**26. A análise simplista:** Uma empresa decidiu adquirir o uso de uma maquinaria que custa 500.000. Se fosse comprada, esta maquinaria seria amortizada linearmente até ao valor residual de zero. A vida útil estimada para este equipamento é de seis anos. A empresa paga 38% de impostos.

A alternativa à compra é o aluguer por seis anos. Um locador pediu por este aluguer uma renda de 125.077 anuais durante seis anos, com o primeiro pagamento a ser efectuado já (início do ano zero) e outros cinco pagamentos adicionais no início de cada um dos restantes cinco anos.

Uma forma de analisar este problema — uma forma enganosa, como se verá — seria a de calcular os meios libertos nos dois casos, alugar ou comprar. A empresa sente que os *tax shields* obtidos com as amortizações ou com o pagamento das rendas não têm nenhuns riscos associados. Suponha-se, além disso, que a taxa que reflecte o valor do dinheiro livre de riscos (*risk-free rate of return*) está em 12% ao ano.

27

Com base nos cálculos feitos com os dados acima, a empresa teria vantagem em alugar o equipamento. Antes, porém, note-se que tanto nesta secção como em outros pontos deste capítulo se vai adoptar em alguns dos mapas apresentados a convenção de dar às saídas de caixa — e aos custos — um sinal positivo e aos inflows um sinal negativo. Assim, alternativas que apresentem os valores actuais mais baixos serão as preferidas. Estão, de facto, a calcular-se os NPV dos custos, não dos ganhos. De acordo com isto, ter-se-ia:

$$\begin{aligned} \text{NPV (leasing)} &= \sum_{t=0}^5 \frac{(1 - 0,38) \times 125.077}{(1,12)^t} = 357.090 \\ \text{NPV (compra)} &= 500.000 - \sum_{t=1}^6 \frac{0,38 \times 83.333,33}{(1,12)^t} = 369.805 \end{aligned}$$

O valor 83.333,33 corresponde à amortização anual do equipamento, quando feita linearmente ao longo de seis anos. Os impostos que não se pagam pelo facto de este valor ser considerado um custo constituem um inflow a subtrair ao preço de custo do equipamento.

Foi dito que este método é enganador. A razão é a seguinte: ignora-se o facto de que um lease é semelhante à compra de um activo com recurso ao crédito. Quando se comparam os cash-flows de um lease com os de uma compra, está-se a comparar realidades que têm riscos financeiros diferentes. Se a empresa considera a hipótese de alugar o equipamento, podia de igual modo considerar a hipótese de contrair um empréstimo para comprá-lo. Assim, obteria benefícios derivados dos impostos e o padrão de cash-flows seria diferente também.

O método de analisar leases que a seguir se explorará tenta descobrir qual o empréstimo que seria capaz de produzir meios libertos — e portanto os riscos financeiros — equivalentes aos do lease em questão. Consequentemente, tal método é chamado *do empréstimo equivalente*.

## 2.4 O Empréstimo Equivalente

Vai-se descobrir um empréstimo capaz de gerar um caudal de saída de dinheiro equivalente ao de um lease. Assim, torna-se possível a comparação com uma compra. Voltando ao exemplo anterior, tinha-se visto que os números respeitantes a ambas as alternativas eram:

Impostos	0.38	0.62 = 1 - T
Custo inicial	500000	
Taxa de juro	0.12	
Renda	125077	77547.7 = Renda * (1 - T)
Amortiz. anual	83333.3	31666.6 = D * T

Vai-se determinar a diferença, em meios libertos líquidos de impostos, entre alugar e comprar o equipamento:

Ano	0	1	2	3	4	5	6
Renda dp imp.	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	
Custo	-500000						
Am. tax shield		31666.6	31666.6	31666.6	31666.6	31666.6	31666.6
V. residual							0
Cash Flow:	-422452	109214	109214	109214	109214	109214	31666.6

Este caudal de cash representa o custo efectivo do aluguer já que, para além daquilo que se paga pelo acréscimo do aluguer — os  $125.077 \times (1 - T)$  — deve-se ainda considerar o *custo da oportunidade*, i.e., aquilo que se deixa de poupar nos impostos por vias das amortizações.

O *tax shield* que se obtém no caso da compra, devido ao facto das amortizações aparecerem como custos, coincide obviamente com os impostos que estas amortizações evitam pagar.

**28** Agora suponha-se que a empresa pede emprestados 463.161,73 por seis anos, à taxa habitual. Pois bem, tal empréstimo pode ser amortizado e os juros pagos por um caudal de dinheiro exactamente equivalente aos meios libertos diferenciais que foram calculados acima. Isto é fácil de provar, construindo um mapa do serviço dessa dívida:

Ano	A amort.	Juro	Amort.	Outflow
	no inic.		no ano	dep. impost.
1	463161	55579.4	74755.1	109214

2	388406	46608.7	80316.9	109214
3	308089	36970.7	86292.5	109214
4	221797	26615.6	92712.7	109214
5	129084	15490.1	99610.5	109214
6	29473.8	3536.85	29473.8	31666.6

Note-se que o outflow depois de impostos tem em conta os *tax shields* que se ganham pelo facto do juro ser um custo:

$$\text{Outflow dp impostos} = \text{Amortização dívida} + (1 - \text{Tx. imposto}) \times \text{juro} \quad (5)$$

Como foi possível determinar o valor 463.161,73? As folhas de cálculo podem obter o mapa do serviço da dívida acima, tanto no sentido normal ou lógico — a partir do montante da dívida obtém-se o resto — como no sentido inverso: A partir de um caudal de saída de dinheiro, obtém-se a dívida que lhe deu origem. Isso consegue-se fazendo todo o mapa “de trás para diante”: Primeiro, digitam-se os outflows. Depois, determinam-se as amortizações a partir da fórmula (5). O montante da dívida no início de cada ano pode então obter-se por acumulação; e a partir destes, os juros. Claro que, com este proceder, se criou um sistema de equações, não um simples encadeado de operações aritméticas. Este sistema pode ser resolvido iterativamente pelo método de Gauss-Siedel. Note-se porém que a maneira mais imediata de chegar a este valor seria usando a função @NPV ( $i(1 - T)$ , 109214 ··· 31666) ou outra equivalente existente em diferentes folhas de cálculo.

29 O valor 463.161,73 é, de facto, a capacidade para contrair dívidas que se perde com um caudal de saída de dinheiro assim:

109214 109214 109214 109214 109214 31666,6

Isto significa que 463.161,73 é o valor actual, descontado de modo a reflectir os impostos, dos cash-flows acima. Pode portanto escrever-se

$$\text{Empréstimo equivalente} = \sum_{t=1}^5 \frac{(1 - T) \times L + D \times T}{[1 + (1 - T) \times i]^t} + \frac{D \times T}{[1 + (1 - T) \times i]^6} \quad (6)$$

onde  $D$  é a amortização anual e  $L$  é a renda. E de facto,

$$463.161,73 = \sum_{t=1}^5 \frac{109.214}{[1 + (1 - 0.38) \times 0,12]^t} + \frac{31.667}{[1 + (1 - 0.38) \times 0,12]^6}$$

Posto isto, torna-se fácil comparar o lease com a compra. Os cash-flows associados á compra do equipamento com recurso a um crédito de 463.161,73 são equivalentes aos associados ao seu lease.

A tabela abaixo mostra este facto com detalhe:

	Ano	0	1	2	3	4	5	6
<b>COMPRAR:</b>								
Custo		500000						
amort. tax shield		-31666	-31666	-31666	-31666	-31666	-31666	-31666
V. residual								0
Emprest. eqv.		-463161						
Em divida		463161	388406	308089	221797	129084	29473.8	
<b>Pagamento:</b>								
Juros		55579.4	46608.7	36970.7	26615.6	15490.1	3536.85	
Amort.		74755.1	80316.9	86292.5	92712.7	99610.5	29473.8	
Depois imp.		109214	109214	109214	109214	109214	31666.6	
Total Comprar		36838.2	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	0
LEASE: Cash-fl.		77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	

Vê-se claramente que a alternativa de comprar o equipamento com recurso ao crédito tem um custo inicial que é menor do que o lease, e depois, ao longo dos anos seguintes, custos idênticos.

30 Em resumo, o método do empréstimo equivalente consiste apenas no seguinte: Comparar o empréstimo equivalente (neste caso os 463.161,73) com a diferença entre os cash-flows da compra e do lease no ano zero (neste caso os 422.452,20). Se o empréstimo equivalente é maior, comprar é preferível.

## 2.5 Ajuste Directo da Análise Simplista

Uma forma alternativa de proceder consistiria em ajustar a análise simplista levada a cabo na secção 2.3. Com isto, ganha-se também uma maior intuição sobre o que é o empréstimo equivalente.

Quem aluga o equipamento paga à empresa de leasing um caudal de cash anuais líquidos de impostos de 109.214 durante os primeiros cinco anos e mais 31.667 no sexto ano. Foi já visto que a capacidade para contrair dívidas criada por este caudal é de 463.161,73. Se

agora se reparar no mapa do serviço da dívida acima, ver-se-á que os juros criam, neste caso, *tax shields* com os seguintes valores:

Ano	Juro	Tax shield (juros)
1	55579.4	21120.1
2	46608.7	17711.3
3	36970.7	14048.8
4	26615.6	10113.9
5	15490.1	5886.24
6	3536.85	1344.00

O valor actual destes *tax shields* é 53.425 à taxa de 12%. Portanto tem-se aqui o custo extra do lease, aquele que a análise simplista da secção 2.3 não teve em conta. Se agora tal custo fôr reconhecido, obtém-se:

Lease:	NPV tax shield da renda a 12%	357089
	NPV tax shields perdidos, juros	53424.9
	Total NPV do lease	410514
Compra:	Custo do equipamento	500000
	NPV tax shields das amortizacoes	130194
	Total NPV da compra	369805

Portanto a compra torna-se preferível ao lease. A análise simplista pode ser usada para decidir sobre as vantagens de um lease desde que se adicione ao custo deste lease o valor actual dos *tax shields* da capacidade para contrair dívidas que foi perdida com o lease.

Uma forma alternativa consistiria em subtrair o valor actual dos *tax shields* sobre a capacidade perdida ao custo do equipamento. No exemplo dado acima, estes dois métodos dão a mesma resposta. Porém, num caso mais geral, seria preciso ter em conta que nem todos os cash-flows contemplados pelo lease podem ser descontados à taxa aplicável em empréstimos livres de risco. Isto pode ser o caso, por exemplo, para o valor residual dos bens.

A análise acima aplica-se sem mais aos casos em que existe a alternativa lease *versus* compra. Porém, em outras situações, a alternativa é directamente o lease *versus* a compra com recurso ao crédito. Isto pode acontecer quando o fabricante de um equipamento se oferece para emprestar o montante necessário à compra. Então, pode proceder-se da seguinte

forma: Usar a análise simplista, subtrair o valor actual dos *tax shields* sobre a dívida usada para comprar o bem.

## 2.6 A Máxima Renda Aceitável

O locador pretende a maior renda possível mas não tanto que leve o locatário a preferir a compra com empréstimo. Se tanto o locador como o locatário pagam impostos pela mesma pauta, se além disso têm acesso ao mesmo crédito e avaliação do valor residual, a conclusão imediata é que a única renda aceitável por ambas as partes seria aquela perante a qual o locador se mostra indiferente em alugar ou não o activo e o locatário é indiferente em comprar o bem ou aluga-lo. Claro que no mundo real dão-se diferenças nos parâmetros acima e são tais diferenças que tornam atraente o negócio.

- 31 Pode usar-se a lógica agora enunciada para calcular a máxima renda que o locador deve pedir para que seja aceitável. Sabemos que, quando se usa o método do empréstimo equivalente, podem ignorar-se todos os cash-flows para lá do primeiro. Portanto, só é preciso calcular o cash-flow no ano zero. No exemplo acima eles eram

Cash-flow líquido de impostos no caso do lease = $(1-T) \times$ renda:	77548
Custo do equipamento:	500000
Subtraindo o empréstimo equivalente,	463162
Cash-flow líquido de impostos no caso de compra com crédito:	36838

A máxima renda aceitável é aquela que fará igualar o cash-flow líquido de impostos no caso do lease (ano zero) com o cash-flow líquido de impostos no caso da compra com crédito, também ano zero. Isto é:

$$(1 - T) \times \text{Renda} = \text{Custo} - \text{Empréstimo equivalente.} \quad (7)$$

Resolvendo para Renda obtém-se o seu máximo aceitável:

$$\text{Renda} = \frac{\text{Custo} - \text{Empréstimo equivalente}}{1 - T}$$

Um valor aproximado para este máximo pode obter-se com recurso a tabelas de what-if. O valor exacto viria, neste caso concreto, com a resolução das fórmulas (7) e (6) em ordem à Renda. Obter-se-ia:

$$\text{Máxima renda aceitável} = \frac{A}{1 - T} \quad \text{Com} \quad A = \frac{\text{Custo} - \sum_{t=1}^6 \frac{D \times T}{[1 + (1 - T) \times i]^t}}{1 + \sum_{t=1}^5 \frac{1}{[1 + (1 - T) \times i]^t}}$$



onde  $D$  é a amortização. Tal expressão, fácil de deduzir, não é cómoda de implementar em folha de cálculo. No exemplo de que nos ocupamos, a máxima renda aceitável viria a ser de 112.081.

## 2.7 A Análise Financeira de Leases Alavancados

Num *lease alavancado* o locador financia a compra de um activo que deseja alugar recorrendo ao crédito. Para o locatário não há modificações no seu ponto de vista. Para o locador, porém, os cash-flows de um lease alavancado levantam dois problemas interessantes:

- A análise financeira do lease sob o ponto de vista do locador. Isto inclui o cálculo dos cash-flows obtidos pelo locador e do seu valor actual.
- O tratamento contabilístico do lease. O uso do método contabilístico *das fases múltiplas* (MPM) para a avaliação da taxa de desconto em leases alavancados.

O MPM é diferente do IRR, a taxa interna de rendibilidade. Num contexto comum tal facto seria irrelevante já que, onde quer que os mercados sejam eficientes, só os cash-flows contam. Porém, num mundo menos eficiente, as pessoas tendem a ficar preocupadas com a forma como os números aparecem nos seus relatórios e contas.

32

Podem explorar-se estes temas construindo um exemplo. Uma companhia de leasing está a considerar a possível compra de um activo cujo preço é 1.000.000. A compra far-se-ia com 200.000 de capital e 800.000 com recurso ao crédito. A taxa de juros a praticar seria de 10% ao ano, de modo que a anuidade a pagar (juros incluídos) seria de 105.179 ao longo dos próximos quinze anos — como se pode ver usando a função @PMT.

A companhia pode alugar o activo por 110.000 ao ano, pagável no fim de cada ano. O termo deste lease é também quinze anos. O activo pode ser amortizado ao longo de cinco anos. As taxas de amortização anuais seriam 15%, 22%, 21%, 21% e 21%. A companhia prevê que no termo do lease o activo terá um valor de 300.000 no mercado. Como o bem estaria amortizado na altura da venda (ano 16), todo o valor residual seria sujeito a impostos. A companhia paga 37% de impostos.

Todos estes factos se encontram na tabela da figura 6, página 34. Também aí se podem ver os cash-flows do locador.

Notar que os cash-flows do locador foram calculados obviamente pela expressão

$$\text{Cash-flow} = (1 - T) \times \text{Renda} + T \times \text{Amortização} - (1 - T) \times \text{Juro} - \text{Reembolso}$$

Custo do activo	1000000
Termo do lease	15 anos
Renda do lease	110000 ao ano
Valor residual	300000 no fim de 15 anos
Capital	200000
Divida	800000 a amortizar em 15 anos
Taxa de juro	0.1 ao ano
Anuidade	105179
Imposto	0.37 sobre os lucros

Ano	Capital inestido	Renda e/ou v. resid.	depois imp.	Amort.	T * Amort.	Divida no comeco do ano	Servico da div.	Juro	Reembolso anual	CASH FLOW
0	-200000									-200000
1		110000	69300	150000	55500	800000	105179	80000	25179	49221
2		110000	69300	220000	81400	774821	105179	77482	27697	74189
3		110000	69300	210000	77700	747124	105179	74712	30467	69465
4		110000	69300	210000	77700	716658	105179	71666	33513	68337
5		110000	69300	210000	77700	683144	105179	68314	36865	67097
6		110000	69300			646280	105179	64628	40551	-11967
7		110000	69300			605729	105179	60573	44606	-13467
8		110000	69300			561123	105179	56112	49067	-15117
9		110000	69300			512056	105179	51206	53973	-16933
10		110000	69300			458082	105179	45808	59371	-18930
11		110000	69300			398712	105179	39871	65308	-21127
12		110000	69300			333404	105179	33340	71839	-23543
13		110000	69300			261565	105179	26157	79022	-26201
14		110000	69300			182543	105179	18254	86925	-29125
15		110000	69300			95618	105179	9562	95617	-32341
16		300000	189000			0			0	189000

Figura 6: Resumo dos dados iniciais e os cash-flows do locador no problema em estudo.

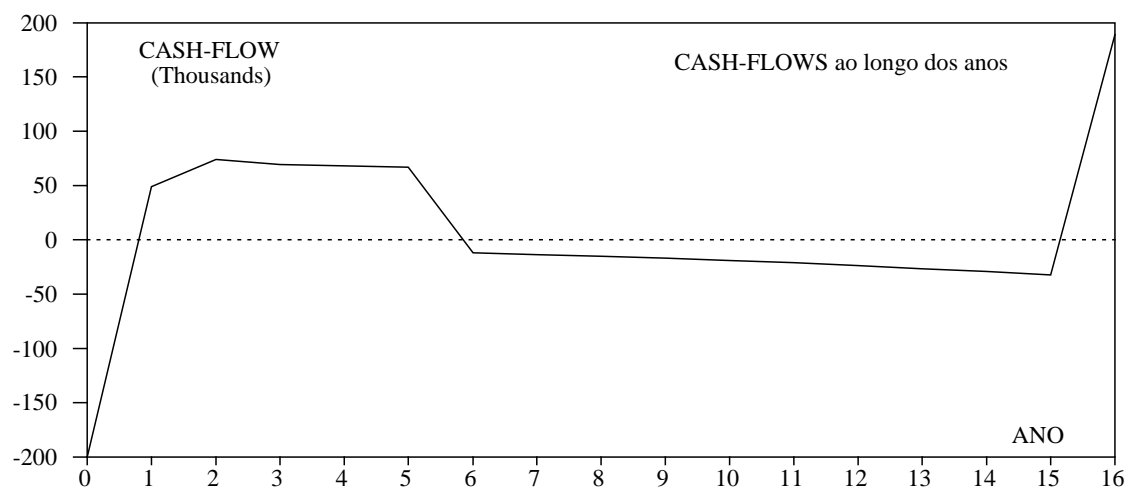


Figura 7: Evolução dos cash-flows ao longo do periodo de aluguer.

No último ano do lease, o valor residual depois de impostos é somado ao cash-flow.

O aspecto dos cash-flows é o que se apresenta no gráfico da figura 7, na página 35. Eles começam por ser positivos no início, diminuindo com o tempo. No termo do contrato tornam-se positivos de novo. Tal evolução é típica para leases alavancados. A razão deste comportamento deve ir buscar-se à amortização: Quanto mais acelerada for a amortização no início da vida de um bem, maiores os inflows devidos aos respectivos *tax shields*. Nos anos finais, a porção das anuidades que cria vantagens fiscais — os juros — cai enquanto o reembolso, que não gera vantagens fiscais, aumenta.

**33. Uma Análise com IRR** Que pode fazer-se com este caudal de cash? Uma forma de continuar a análise acima seria desconta-los a uma taxa adequada onde o risco tivesse sido considerado.

No exemplo acima, o valor actual do caudal de dinheiro à taxa correspondente ao empréstimo livre de riscos é de 38.206 (desconta-se à taxa corrigida para impostos do locador). Portanto, este lease parece ser um bom negócio para o locador. A verdade é que os locadores se sentem frequentemente pouco à vontade com NPV's. Eles preferem o IRR, a taxa interna de rentabilidade, como medida do interesse económico do aluguer. Como os cash-flows mudam de sinal duas vezes é possível que também existam dois IRR. Um teste rápido com funções já existentes em folhas de cálculo mostra que, neste caso, só existe um IRR de 12,95%. Usando essa taxa pode obter-se um padrão do valor económico do lease alavancado a partir do cash-flow. Esse padrão seria o da figura 8 na página 36.

Ano	CASH FLOW	Investimento	resultado	Reducao no investimento
1	49221	200000	25903	23318
2	74189	176682	22883	51306
3	69465	125376	16238	53227
4	68337	72149	9344	58993
5	67097	13156	1704	65393
6	-11967	-52237	-6766	-5201
7	-13467	-47036	-6092	-7375
8	-15117	-39661	-5137	-9981
9	-16933	-29680	-3844	-13089
10	-18930	-16591	-2149	-16781
11	-21127	190	25	-21151
12	-23543	21341	2764	-26307
13	-26201	47648	6171	-32372
14	-29125	80020	10364	-39489
15	-32341	119509	15478	-47819
16	189000	167328	21672	167328

Figura 8: Padrão do valor económico do lease alavancado a partir do IRR do cash-flow.

O resultado atribuível ao lease em cada ano calcula-se como o produto do IRR pelo investimento no início desse ano. O restante do cash-flow desse ano é a redução no investimento referido. A última redução no investimento—os 167.329—coincide com o investimento no início do ano anterior o que mostra, em termos económicos, que o investimento se paga a si mesmo a uma taxa igual ao IRR.

34 O facto interessante que esta tabela põe em evidência é que cinco dos números que expressam resultados são negativos. Existe uma forma de interpretar isso: resultados negativos querem dizer que em alguns dos anos o lease não é economicamente interessante para o locador, muito embora não seja possível desistir dele. No início do ano seis a empresa enfrenta dez anos de cash-flow negativo. Só no ano 16 volta a empresa a ver um cash-flow positivo.

O locador estaria desejoso de pagar a alguém para tomar sobre si o contrato no início do ano seis. É esse facto o que leva a análise acima a atribuir um valor económico negativo ao lease neste ponto. Em termos económicos, o lease é, no ano seis, pior do que não ter valor: É um passivo.

**35. Contabilidade e Leases Alavancados** As fases de resultado negativo nos leases alavancados causam à contabilidade das empresas que se dedicam a este negócio umas certas dores de cabeça. De facto, o locador deveria logicamente usar a taxa interna de

phase rate	0.106483	END	0.170996
LOW	0.106475	RUNNUMBER	17
HIGH	0.106491	MAXRUN	20

investimento				
ano	no inicio do ano	cash flow	resultado	reducao no investimento
1	200000	49221	21297	27924
2	172076	74189	18323	55866
3	116210	69465	12374	57090
4	59119	68337	6295	62042
5	-2923	67097	0	67097
6	-70020	-11967	0	-11967
7	-58053	-13467	0	-13467
8	-44586	-15117	0	-15117
9	-29469	-16933	0	-16933
10	-12536	-18930	0	-18930
11	6394	-21127	681	-21808
12	28202	-23543	3003	-26546
13	54748	-26201	5830	-32031
14	86779	-29125	9241	-38365
15	125144	-32341	13326	-45667
16	170811	189000	18189	170811

Figura 9:

rendibilidade dos cash-flow provenientes do lease da forma descrita acima. Estes cash-flow seriam escriturados como um resultado.

Porém, na prática, os locadores evitam o mais que podem registrar uma perda nos seus livros, mesmo quando se trata de uma perda como as descritas acima. Desta repugnância surgiu o referido método contabilístico das fases múltiplas (MPM) que redonda no método do IRR também referido acima sempre que não há perdas mas que é capaz de mascarar as perdas próprias deste tipo de negócio.

Defina-se um *ganho por fases* da seguinte forma:

O que se consegue com este método vem claramente descrito nas figuras 9 e 10 e é auto-explicativo.

## 2.8 Exercícios

**36.** Um caudal de entrada de dinheiro de 100.000 dentro de um ano, 50.000 dentro de dois e 50.000 dentro de três, cria uma capacidade para contrair uma dívida de 166.223,96 já, caso a taxa de juro seja de 19%. Qual o imposto que se está a pagar?

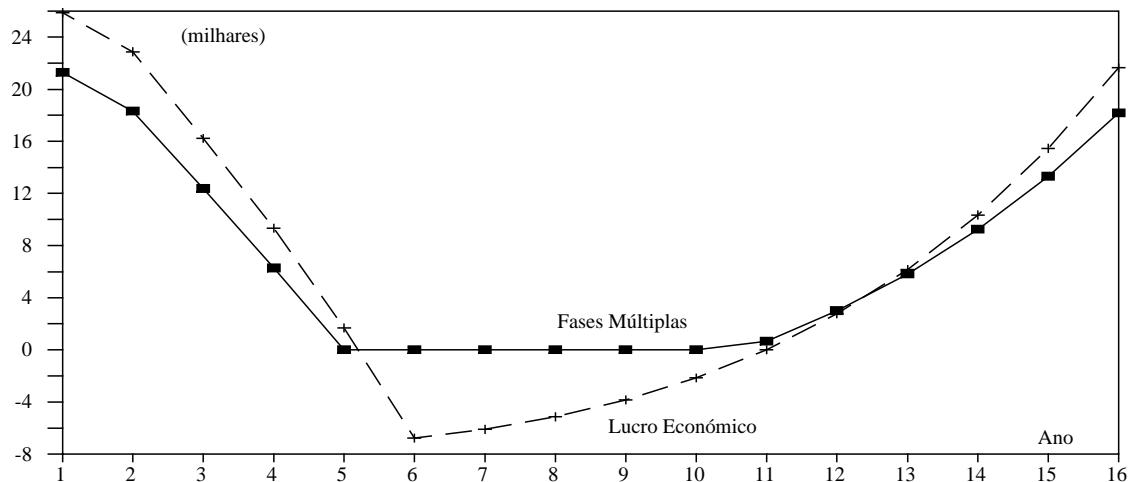


Figura 10: O resultado económico comparado com o método das fases múltiplas.

**37.** Considerar o exemplo explorado na secção 2.3 mas com as duas seguintes alterações:

1. A renda é pagável no início dos anos  $1, \dots, 6$ .
2. O equipamento é amortizado linearmente até um valor residual de 50.000. Tanto o locador como o locatário prevêm que o valor do equipamento, quando posto no mercado no início do ano 7 será de 76.000. A diferença entre este valor e o valor contabilístico será objecto de impostos á mesma taxa que os resultados da empresa.

Sendo assim,

- Suponha-se que o cash-flow líquido de impostos que é recebido com a venda residual do equipamento é parte dos cash-flows que determinam o empréstimo equivalente. Deveria a empresa comprar, ou pelo contrário, alugar, se a renda fosse de 112.000?
- Qual seria a máxima renda aceitável?
- Calcular a máxima renda aceitável para diferentes taxas de imposto.

**38.** Reconsiderar o exemplo de lease alavancado descrito na secção 2.3. Mostrar que, quando o tipo de amortização é linear ao longo de toda a vida do activo (15 anos) não se dão resultados negativos. Explicar.

**39.** No mesmo exemplo, encontrar a renda mínima para que não se dêem lucros negativos.

## Capítulo 3

# A Fronteira Eficiente de uma Carteira

O estudo do investimento baseado em carteiras de títulos teve o seu primeiro avanço significativo em 1952 com Henry Markowitz [25]. A intuição básica de Markowitz é a de que as características particulares de cada um dos títulos contribuem pouco para o aumento da riqueza de um investidor. Importam mais as características de todo um conjunto de activos organizados em *carteiras* e onde cada um deles existe numa dada proporção.

Neste capítulo vai-se aprender a manipular activos cotados em mercados de capitais com vista à constituição de carteiras e optimização dos seus ganhos. Tais activos podem ser acções, obrigações, imobiliário ou quaisquer outros. Porém, os exemplos aqui dados referir-se-ão apenas a acções. Em primeiro lugar, aprender-se-á a calcular a fronteira eficiente de uma carteira. No capítulo 4 estudar-se-á o modo de determinar o Beta, ou sensibilidade aos movimentos do mercado.

### 3.1 Introdução

Considere-se um conjunto  $1, \dots, j, \dots, N$  de activos cujo valor futuro é incerto. O seu comportamento estatístico pode ser descrito por um ganho esperado,  $E(R_j)$ , pela variância desse ganho,  $\text{VAR}(R_j)$  e pela covariância com outros ganhos,  $\text{COV}(R_j, R_i)$ . É frequente encontrar-se também a notação  $\sigma_j^2$  para a variância e  $\sigma_{ji}$  para a covariância. Notar que a variância é igual à covariância de um ganho consigo próprio.

40

O exemplo que se segue descreve duas cotações mensais, as do *activo A* e do *activo B*,

A	B
25.000	45.000
24.125	44.875
23.375	46.875
24.750	45.250
26.625	50.875
26.500	58.500
28.000	57.250
28.875	62.750
29.750	65.500
31.375	74.375
36.250	78.500
37.125	78.000
36.875	78.125

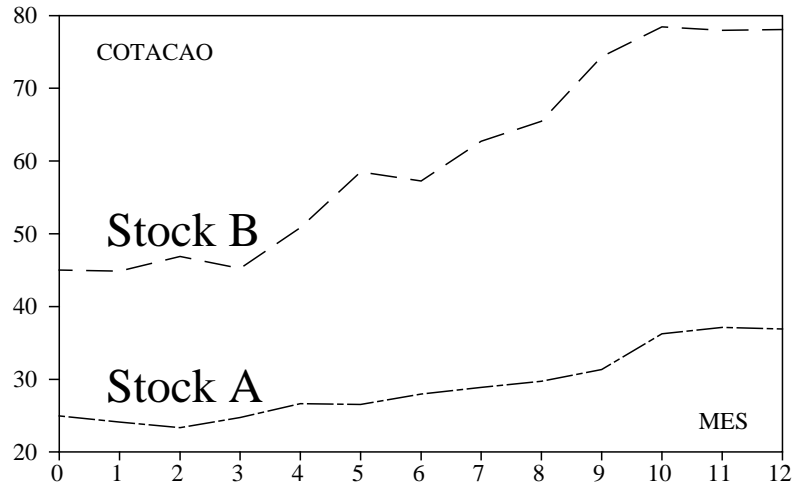


Figura 11: Evolução, ao longo de um ano, das cotações mensais de dois activos cotados, A e B.

ao longo de um ano (ver a figura 11). As listas que se mostram do lado esquerdo da figura dão a cotação à hora do fecho da Bolsa no último dia em que houve transações em cada mês. O período zero—o primeiro da lista—mostra a cotação à partida ou inicial de cada activo. Pretende-se calcular as características estatísticas destas duas séries.

**41. Cálculo dos Ganhos:** O primeiro a fazer é transformar cotações em ganhos (*return*) mensais. Um ganho mensal é o ganho percentual que teria um investidor que comprasse um activo no fim do mês  $t - 1$  e depois o vendesse no fim do mês seguinte, o  $t$ . Dado um mês  $t$  e um activo chamado activo  $A$ , o ganho mensal  $R_t^A$  seria

$$R_t^A = \frac{\text{Dividendos}_t + \text{Cotação}_t - \text{Cotação}_{t-1}}{\text{Cotação}_{t-1}} \quad (8)$$

No nosso exemplo ignoram-se os dividendos.

**42. O significado dos ganhos:** O interesse em considerar ganhos em vez de cotações vem do significado económico que os últimos têm. Continuando com o exemplo acima, os ganhos mensais em percentagem seriam facilmente calculados e dariam

mes	activo A		activo B	
	cotacao	ganho	cotacao	ganho
0	25		45	
1	24.125	-3.500%	44.875	-0.278%
2	23.375	-3.109%	46.875	4.457%



3	24.75	5.882%	45.25	-3.467%
4	26.625	7.576%	50.875	12.431%
5	26.5	-0.469%	58.5	14.988%
6	28	5.660%	57.25	-2.137%
7	28.875	3.125%	62.75	9.607%
8	29.75	3.030%	65.5	4.382%
9	31.375	5.462%	74.375	13.550%
10	36.25	15.538%	78.5	5.546%
11	37.125	2.414%	78	-0.637%
12	36.875	-0.673%	78.125	0.160%

**43. Validade do modelo:** Vai-se agora fazer uma suposição arrojada: Passa a supor-se que o comportamento estatístico destas séries é constante ao longo do tempo. Assim, as características dos ganhos no futuro — os seus valores esperados, as suas variâncias — podem deduzir-se calculando essas características tais como foram no passado. Em geral, esta suposição é verificada aproximadamente na prática, desde que os períodos considerados não sejam longos. Porém, dão-se casos em que as características estatísticas de activos cotados na Bolsa se modificam bruscamente. Foi o caso das cotações de companhias petrolíferas em 1973 ou de companhias de transporte aéreo dos Estados Unidos quando, em 1978, caíram as barreiras proteccionistas do governo [16].

Se a suposição acima é considerada aceitável, a média,  $\mu_R$  dos ganhos no passado pode considerar-se como o *valor esperado*,  $E(R)$ , desses ganhos no futuro. Usando as funções estatísticas existentes em qualquer folha de cálculo é fácil de ver que, para os activos A e B, esses valores esperados e variâncias seriam:

activo A		activo B	
Valor esperado	Variância	Valor esperado	Variância
3.4133%	0.002525	4.8835%	0.003798

**44. Cálculo de Covariâncias:** Pretende-se agora saber qual será a *covariância* — a variação conjunta — dos ganhos. Tal como o coeficiente de correlação, a covariância mede o grau em que dois ganhos,  $A$  e  $B$ , variam em uníssonos. O coeficiente de correlação é uma covariância estandardizada. A covariância calcula-se aplicando a fórmula

$$\text{COV}(R_{At}, R_{Bt}) = \frac{1}{M} \sum [R_{At} - E(R_{At})] \times [R_{Bt} - E(R_{Bt})] \quad (9)$$

em que  $M$  é o número de casos (no nosso caso  $M = 12$ ). É fácil achar a covariância:

mes	activo A		activo B		R(A)-E(A)	R(B)-E(B)	produto
	cotacao	ganho	cotacao	ganho			
0	25		45				
1	24.125	-3.500%	44.875	-0.278%	-0.0691	-0.0516	0.0036
2	23.375	-3.109%	46.875	4.457%	-0.0652	-0.0043	0.0003
3	24.75	5.882%	45.25	-3.467%	0.0247	-0.0835	-0.0021
4	26.625	7.576%	50.875	12.431%	0.0416	0.0755	0.0031
5	26.5	-0.469%	58.5	14.988%	-0.0388	0.1010	-0.0039
6	28	5.660%	57.25	-2.137%	0.0225	-0.0702	-0.0016
7	28.875	3.125%	62.75	9.607%	-0.0029	0.0472	-0.0001
8	29.75	3.030%	65.5	4.382%	-0.0038	-0.0050	0.0000
9	31.375	5.462%	74.375	13.550%	0.0205	0.0867	0.0018
10	36.25	15.538%	78.5	5.546%	0.1213	0.0066	0.0008
11	37.125	2.414%	78	-0.637%	-0.0100	-0.0552	0.0006
12	36.875	-0.673%	78.125	0.160%	-0.0408	-0.0472	0.0019

A covariância é a média da coluna “produto” e vale 0,000364. Este número, ao contrário do coeficiente de correlação, não é de interpretação directa. O seu valor depende da escala e unidades usadas.

**45. Correlação:** O coeficiente de correlação,  $\rho$ , pode obter-se por standardização da covariância:

$$\rho_{AB} = \frac{\text{COV}(A, B)}{\sqrt{\text{VAR}(A) \times \text{VAR}(B)}} \quad (10)$$

Neste caso o valor de  $\rho_{AB}$  é 0,1. O coeficiente de correlação mede o grau, expresso sob a forma de um rácio, de co-variação existente entre dois ganhos. Varia sempre entre +1 e -1. Estes valores extremos indicariam uma relação linear: Um ganho seria uma réplica aumentada ou diminuída do outro. Uma correlação de zero, pelo contrário, indicaria ausência de co-variação. A independência de dois fenómenos estatísticos gera coeficientes de correlação nulos. Porém, note-se que o inverso não é verdadeiro: Podem existir casos em que se obtém um coeficiente de correlação nulo sem que os fenómenos sejam independentes.

**46** Note-se também que, caso se desejasse escrever a covariância em percentagem — como se fez para os ganhos — ter-se-ia que escrever 3,64% o que é dez mil vezes o número obtido e não cem vezes.

### 3.2 Valor Esperado e Variância de uma Carteira

Vai-se agora supôr que existe uma carteira com metade dos títulos do activo A e a outra metade do activo B. Qual será a média do ganho — ou o ganho esperado — dessa carteira? E qual será a sua variância ou *risco*? Fazendo o cálculo ponderado, obtêm-se os seguintes ganhos mensais para a referida carteira:

mes	A	B	carteira	
1	-3.500%	-0.278%	-1.889%	0.5 proporcao de A
2	-3.109%	4.457%	0.674%	
3	5.882%	-3.467%	1.208%	
4	7.576%	12.431%	10.003%	
5	-0.469%	14.988%	7.259%	
6	5.660%	-2.137%	1.762%	
7	3.125%	9.607%	6.366%	
8	3.030%	4.382%	3.706%	
9	5.462%	13.550%	9.506%	
10	15.538%	5.546%	10.542%	
11	2.414%	-0.637%	0.888%	
12	-0.673%	0.160%	-0.257%	
	3.411%	4.884%	4.147%	sao os ganhos esperados
	0.00253	0.00380	0.00176	sao as variancias (risco)

É facil de ver que a média ou ganho esperado da carteira é igual à média ponderada dos ganhos esperados em cada activo. Isto é uma regra geral: O ganho esperado de uma carteira é a média ponderada dos ganhos esperados dos seus componentes. Os factores de ponderação são as proporções de cada activo dentro da carteira:

$$E(R_P) = \sum E(R_i) \times w_i \quad (11)$$

No nosso caso — apenas dois activos — seria:

$$E(R_P) = E(R_A) \times w_A + E(R_B) \times (1 - w_A)$$

A variância ou incerteza de uma carteira é um pouco mais complicada de obter. O seu valor depende fortemente do grau de co-variabilidade existente entre os activos que a compõem. No caso de apenas dois activos, A e B, com um coeficiente de correlação de  $\rho_{AB}$  ela seria:

$$\text{VAR}(R_P) = \text{VAR}(R_A) \times w_A^2 + \text{VAR}(R_B) \times (1 - w_A)^2 + 2 \times w_A \times (1 - w_A) \times \text{COV}(R_A, R_B)$$

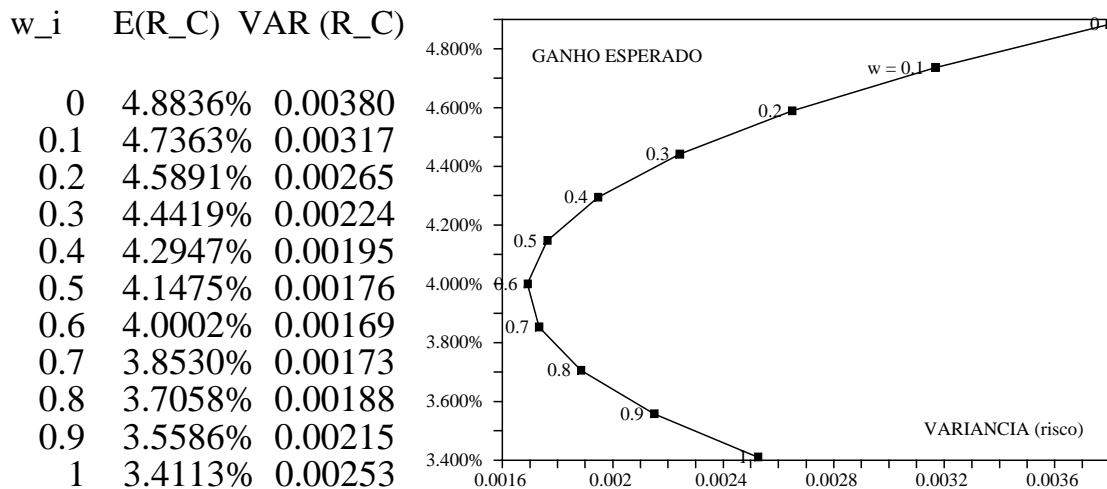


Figura 12: Os ganhos esperados e os riscos para diversas proporções de dois activos numa carteira onde existem apenas dois títulos.

Mais adiante se introduzirão as fórmulas respeitantes ao caso geral.

47 Lembremos ainda que a informação foi definida como uma redução na incerteza. Claramente, se um investidor conseguir, através de uma diversificação apropriada, reduzir a variância da sua carteira, estará a reduzir a incerteza e portanto terá obtido um ganho em informação.

48 É frequente que se pretenda saber quais os valores esperados e a incerteza associada a uma carteira para diversas possíveis proporções,  $w_i$ , dos activos que a compõem. Vai-se fazer isso com o exemplo que se tem vindo a usar. É fácil obter uma tabela como a da figura 12. Observe-se, do lado direito da mesma figura, o gráfico da variação dos ganhos esperados com a variância para estas diversas proporções. Cada investidor escolheria, de entre as possíveis proporções, aquela que melhor se ajustasse às suas preferências, i.e., ao desejado compromisso entre o risco e o ganho esperado.

### 3.3 O Ganho Esperado e a Variância no Caso Geral

No caso geral de  $N$  activos possíveis, vai-se supôr que a proporção do activo  $i$  na carteira é  $w_i$ . Usar-se-à notação matricial. Os  $w_i$  formam um vector-coluna a que se chamará  $\Theta$ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

Em certos casos pode ser conveniente escrever-se este vector como uma linha:

$$\Theta^T = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_N]$$

$\Theta^T$  é o transposto de  $\Theta$ . O ganho esperado para uma carteira cujas proporções de diferentes activos são as dadas por  $\Theta$  é a média ponderada dos ganhos esperados de cada activo. Assim,

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^N E(R_i) \times w_i$$

Esta mesma expressão tem, em notação matricial, o seguinte aspecto:

$$E(R_P) = E(R)^T \Theta = \Theta^T E(R)$$

Quanto à variância da carteira com mais de dois títulos, ela vem dada pela expressão

$$\text{VAR} (R_P) = \sum_{i=1}^N \text{VAR} (R_i) \times w_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \text{COV} (R_i, R_j) \times (2w_i w_j)$$

A variância de cada activo aparece nesta fórmula a multiplicar pelo quadrado da sua proporção na carteira. A covariância de cada par de activos diferentes aparece também uma vez, a multiplicar pelo dobro do produto da sua proporção na carteira.

49 Todo o tratamento matemático das fórmulas acima se simplifica ao usar-se uma notação matricial. definindo a *matriz de variância e covariância*,  $S$ , como sendo a matriz que contém as variâncias em diagonal e as covariâncias nas outras células da seguinte forma:

$$S = \begin{bmatrix} \text{VAR} (R_1) & \text{COV} (R_{1,2}) & \text{COV} (R_{1,3}) & \dots & \text{COV} (R_{1,N}) \\ \text{COV} (R_{2,1}) & \text{VAR} (R_2) & \text{COV} (R_{2,3}) & \dots & \text{COV} (R_{2,N}) \\ \text{COV} (R_{3,1}) & \text{COV} (R_{3,2}) & \text{VAR} (R_3) & \dots & \text{COV} (R_{3,N}) \\ \vdots & & & & \\ \text{COV} (R_{N,1}) & \text{COV} (R_{N,2}) & \text{COV} (R_{N,3}) & \dots & \text{VAR} (R_N) \end{bmatrix}$$

a variância de uma carteira vem dada pela expressão (conhecida como *forma quadrática*)

$$\text{VAR} (R_P) = \Theta^T S \Theta \quad (12)$$

que corresponde à expressão acima mas é mais fácil de implementar. As fórmulas matriciais podem ser resolvidas com facilidade em algumas folhas de cálculo.

**50. Matriz de Variância-Covariância: cálculo matricial.** Quando o número de observações é pequeno, pode obter-se directamente a matriz de variância e covariância a partir da matriz  $R_{n \times p}$  dos ganhos ( $n$ , número de observações;  $p$ , número de títulos) usando a fórmula

$$S = \frac{1}{n} R^T R - E E^T \quad (13)$$

onde  $E_{p \times 1}$  é o vector dos valores esperados. Para valores de  $n$  e  $p$  elevados, a maioria das folhas de cálculo demoraria demasiado tempo.

### 3.4 As Carteiras Eficientes

Uma carteira eficiente é aquela que tem a menor incerteza de entre todas as carteiras capazes de originar o mesmo ganho esperado. Pode também definir-se a carteira eficiente como a que tem o maior ganho esperado de entre todas as que têm a mesma incerteza. A *fronteira eficiente* é o conjunto de todas as possíveis carteiras eficientes. De facto, para uma dada colecção de activos, existe um número infinito de proporções capazes de originar uma carteira eficiente. Essas diferentes proporções definem a fronteira eficiente.

Um investidor terá obviamente todo o interesse em que a sua carteira se situe na fronteira eficiente. Isso significa que a incerteza a que se expõe é a mínima possível para um dado ganho esperado. Nesta secção apresentar-se-á o suporte analítico necessário à determinação de carteiras eficientes e da respectiva fronteira. Nas secções seguintes dar-se-á um exemplo de implementação.

**51** Sob o ponto de vista analítico, o problema de encontrar a fronteira eficiente de um dado conjunto de activos resume-se a um caso simples de optimização linear. Dado um ganho esperado  $E(R_P)$ , a carteira eficiente será a que obedecer a

$$\min \sum_i \sum_j \text{COV} (R_{ij}) \times w_{ij} = \text{VAR} (R_P)$$

sujeito a

$$\sum_i R_P \times w_i = E(R_p) \quad \text{e a} \quad \sum_i w_i = 1$$

Black (1972) [7] mostrou que a fronteira eficiente é o *locus* de todas as combinações convexas de duas carteiras que sejam eficientes. Isto significa que, se as duas colecções de proporções

$$\Theta^1 = [w_1^1, w_2^1, w_3^1, \dots, w_N^1] \quad \text{e a} \quad \Theta^2 = [w_1^2, w_2^2, w_3^2, \dots, w_N^2]$$

forem eficientes, também o será qualquer combinação destas colecções. Assim, tomando uma proporção  $\omega$  da primeira e  $(1 - \omega)$  da segunda e construindo dessa forma uma nova carteira, ter-se-ia:

$$\Theta^1\omega + \Theta^2(1 - \omega) = [w_1^1\omega + w_1^2(1 - \omega), w_2^1\omega + w_2^2(1 - \omega), \dots, w_N^1\omega + w_N^2(1 - \omega)].$$

Uma forma simples de determinar a fronteira eficiente consiste portanto em achar duas carteiras que o sejam e depois combiná-las em proporções variáveis,  $\omega$ . Cada  $\omega$  determina um ponto da fronteira eficiente. É este o processo que se usará no exemplo a apresentar.

**52. O método:** Suponha-se que são conhecidos os ganhos esperados,  $E(R_i), i = 1, N$ , e as variâncias-covariâncias desses ganhos,  $\text{COV}(R_{ij}), i, j = 1, N$ . Uma forma expedita de achar uma de entre as possíveis carteiras eficientes seria a resolução simultânea do seguinte sistema de equações em  $z$ :

$$E(R_i) - C = \sum_j \text{COV}(R_{ij}) \times z_j, \quad i = 1, N$$

onde  $C$  é um número positivo qualquer. Obtém-se assim um conjunto de valores para  $z$ , os quais, depois de normalizados, dão as proporções de uma de entre as possíveis carteiras eficientes. O método acima vem descrito em Elton & Gruber (1984) [16].

53

Depois de resolvido o sistema de equações, podem achar-se os  $w_i$  tais que

$$w_i = \frac{z_i}{\sum_j z_j} \quad (14)$$

Estes  $w_i$  são as proporções de cada activo que correspondem a uma de entre as possíveis carteiras eficientes.

**54. Matrizes:** O sistema resolvido acima pode escrever-se em notação matricial:

$$R - C = SZ$$

onde  $S$  é a matriz de variância-covariância,  $Z$  é um vector de incógnitas e  $R$  é o vector dos ganhos esperados de cada activo. Para resolver este sistema, multiplicam-se ambos os lados por  $S$ , ficando

$$Z = S^{-1}[R - C] \quad (15)$$

Se este sistema fôr resolvido duas vezes com dois valores diferentes de  $C$ , obtêm-se duas carteiras eficientes. Chamemos-lhes  $\Theta^1$  e  $\Theta^2$ . Para se obterem mais pontos que estejam também sobre a fronteira eficiente, é preciso determinar a covariância entre  $\Theta^1$  e  $\Theta^2$ .

Assumindo que  $\Theta^1$  e  $\Theta^2$  são vectores-coluna, a covariância seria dada por uma generalização da fórmula (12):

$$\text{COV}(\Theta^1, \Theta^2) = \Theta^{1T} S \Theta^2 \quad (16)$$

onde  $\Theta^{1T}$  é o transposto de  $\Theta^1$ . Uma vez achada esta covariância, o lugar geométrico de todas as possíveis carteiras eficientes virá dado por

$$\omega \Theta^1 + (1 - \omega) \Theta^2$$

para qualquer  $\omega$ . Sendo  $R^1$  e  $R^2$  os vectores que contêm os ganhos esperados dos componentes das carteiras eficientes 1 e 2, ter-se-ia:

$$R^1 = \Theta^{1T} E(R) \quad \text{e também} \quad R^2 = \Theta^{2T} E(R) \quad (17)$$

Recorde-se por fim que o ganho esperado e a variância de qualquer carteira composta de duas carteiras eficientes na proporção de  $\omega$  e  $1 - \omega$  vêm dados por

$$E(R^P) = \omega R^1 + (1 - \omega) R^2, \quad (18)$$

$$\text{VAR} (R^P) = \omega^2 \text{VAR} (R^1) + (1 - \omega)^2 \text{VAR} (R^2) + 2\omega (1 - \omega) \text{COV} (R^1, R^2) \quad (19)$$

Uma vez que as folhas de cálculo podem manipular matrizes, o formalismo desenvolvido acima está dentro das suas possibilidades. O ponto de partida para a determinação da fronteira eficiente é o cálculo de  $S$ , a matriz de variância-covariância de uma colecção de ganhos obtidos com activos. Já se viu como proceder no caso de um número pequeno de observações. De posse de  $S$ , e conhecendo-se os ganhos esperados de cada activo, é possível



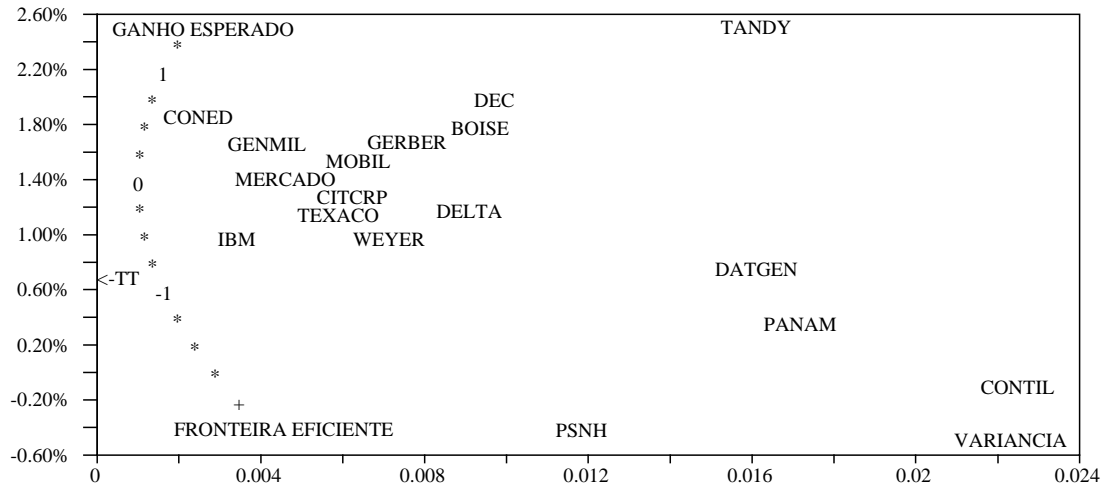


Figura 13: Bolsa de Nova York, cotações mensais entre Janeiro de 1976 e Dezembro de 1985. Os ganhos esperados e os riscos (variância) para diversas proporções de duas carteiras eficientes determinam uma fronteira eficiente (asteriscos). No mesmo gráfico, as posições ocupadas por cada um dos activos em causa, pelo índice do mercado e pelos Títulos do Tesouro (TT).

a determinação de colecções  $\Theta$  de proporções de cada activo capazes de tornar eficiente tal carteira.

Especificamente, a partir dos valores esperados, variâncias e covariância de duas carteiras eficientes, é possível construir uma tabela com diversas combinações de ambas e obter assim uma série de pontos sobre a fronteira eficiente. A figura 13 (página 49) mostra, para 16 activos cotados na Bolsa de Nova York (cotações mensais entre Janeiro de 1976 e Dezembro de 1985) os ganhos esperados e a variância para tais proporções. No mesmo gráfico podem ver-se também as posições ocupadas por cada um dos activos em causa, pelo índice do mercado e pelos Títulos do Tesouro — supostamente, um activo que não tem risco. A referida tabela pode facilmente obter-se com a aplicação das fórmulas (18) e (19) para  $\omega$  crescentes.

As duas carteiras eficientes descobertas com a técnica descrita podem estar perto uma da outra sobre a fronteira eficiente ou, pelo contrário, separadas. Quando estão perto, pode ser preciso fazer variar a proporção de uma e outra entre extremos para além de 1 ou inferiores a zero. Caso contrário, apenas uma porção muito pequena da fronteira eficiente seria desenhada.

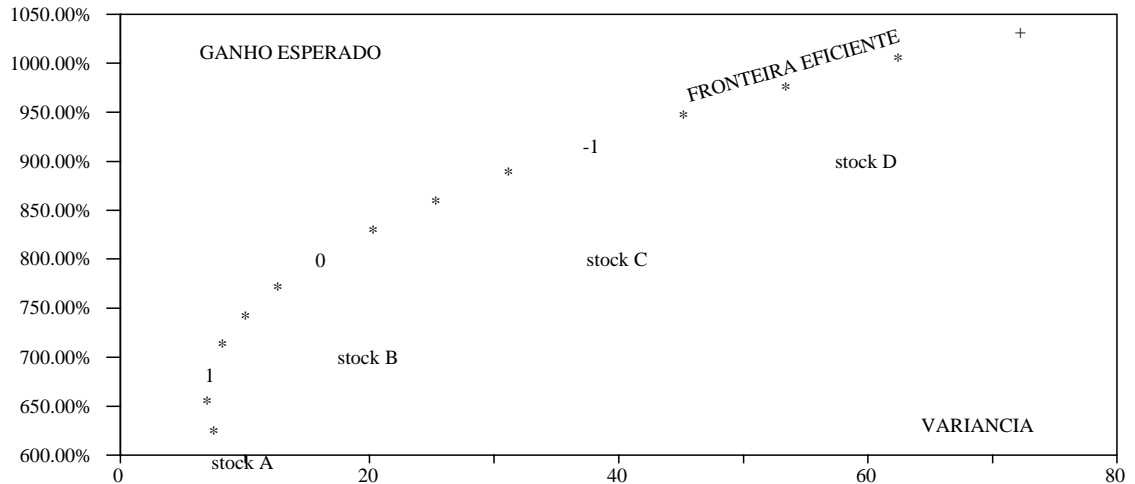


Figura 14: A fronteira eficiente para os quatro activos propostos por Roll.

**55. Proporções negativas:** Ao examinar as proporções que determinam as carteiras eficientes 1 e 2, pode acontecer que algumas delas sejam negativas. Isto quer dizer que esse activo é vendido *curto* (*short sell*). Um activo é vendido curto quando ele não pertence a quem o vende mas foi apenas emprestado.

### 3.5 Exercício

56

Num artigo bem conhecido, Roll (1978) [33] discute a capacidade do CAPM para classificar o desempenho de uma carteira. Roll usa um exemplo contendo quatro activos com a seguinte matriz de variância-covariância:

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 20 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 40 & 10 \\ 5 & 1 & 10 & 60 \end{bmatrix}$$

O vector de ganhos esperados é:

$$R^1 = [6, 7, 8, 9].$$

Roll afirma que as seguintes cinco carteiras são eficientes:

w (1)	w (2)	w (3)	w (4)	w (5)
59.60%	40.70%	-4.40%	-49.60%	18.20%

27.60%	31.90%	42.00%	52.40%	37.00%
7.69%	14.00%	29.00%	44.10%	21.50%
5.08%	13.40%	33.30%	53.10%	23.30%

É a sua afirmação correcta (ver figura 14)?

## Capítulo 4

# Os Betas, Incerteza e Robustez

O CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) tenta captar o equilíbrio existente nos mercados de capitais. A sua conclusão principal é que a relação entre o risco associado às cotações de cada activo e o seu ganho esperado é linear. Esta linearidade pode expressar-se com a equação de uma recta e tem a forma

$$E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_M) - R_f] \quad (20)$$

onde  $E(R_i)$  é o ganho esperado para o activo  $i$ ,  $E(R_M)$  é o ganho esperado para uma carteira  $M$  que reflecta o movimento do mercado como um todo,  $R_f$  é o ganho que se obtém com um activo livre de risco (supostamente, os Títulos do Tesouro) e finalmente  $\beta_i$  é uma medida da sensibilidade do activo  $i$  aos referidos movimentos do mercado como um todo:

$$\beta_i = \frac{\text{COV}(R_i, R_M)}{\text{VAR}(R_M)} \quad (21)$$

(20) é conhecida como recta valor-mercado (*Security-Market Line*, SML).

**57** Uma versão alternativa do CAPM foi introduzida por Black (1972) [7] e não requer a suposição de que existe um activo livre de risco. No CAPM de Black, conhecido pelo nome de *Zero-Beta CAPM* a relação em equilíbrio entre ganhos esperados e Betas passa a ser

$$E(R_i) = R_Z + \beta_i [E(R_M) - R_Z]$$

onde  $R_Z$  é o ganho esperado de um activo que tenha um Beta de zero.

**58** Este capítulo procurará familiarizar os interessados com o CAPM, os problemas que levanta e o seu significado em termos da Teoria da Informação. Proceder-se-á ao cálculo dos  $\beta_i$ , (conhecidos como os *Betas*) de alguns títulos cotados na Bolsa de Nova York e

replicar-se-á um teste simples do CAPM. Estes temas serão apresentados na sua forma mais simples. Existe uma enorme literatura acerca de diversas questões metodológicas em torno deste assunto. Aqueles que estiverem interessados em aprofundar, devem começar por consultar Miller & Scholes (1972) [27]. Uma boa revisão pode também ser encontrada no livro de Elton & Gruber (1984) [16] ou em Levy & Sarnat (1984) [23].

**59. Crítica da possibilidade de testar o CAPM:** M. Roll (1977) [32], (1978) [33] mostrou que a relação expressa pela fórmula (20) também se verificava quando, em vez da carteira  $M$ , representando o movimento do mercado como um todo, se usava uma outra qualquer carteira eficiente. De acordo com Roll, podem distinguir-se dois tipos diferentes de testes possíveis da validade do CAPM: Um teste estatístico que nos diz se sim ou não  $M$  é uma carteira eficiente e um teste económico, capaz de dizer se sim ou não  $M$  realmente representa os movimentos do mercado como um todo. Neste capítulo, discutir-se-á a forma desse teste e mostrar-se-á como implementá-lo em 123.

## 4.1 Um Teste do CAPM

O ponto de partida para testar o CAPM e calcular os Betas consiste em obter e examinar séries contendo os ganhos de um conjunto de títulos. Usar-se-á o mesmo conjunto que permitiu a determinação da fronteira eficiente (capítulo 3). Trata-se de uma colecção de 16 ganhos mensais, observados durante o período que decorreu de Janeiro de 1978 e Dezembro de 1985. Porém, inclui-se agora um índice que é suposto ser capaz de captar  $M$ .

60 Os passos a dar são os seguintes:

1. Determinar qual a série candidata a representar  $M$ , a carteira do mercado. Aqui, usar-se-á o índice conhecido por *Standard & Poor 500* (S&P 500) como candidato.
2. Para cada um dos  $1, \dots, i, \dots, 16$  títulos do conjunto, determinar  $\beta_i$ .
3. Fazer a regressão dos ganhos esperados de cada título nos seus respectivos  $\beta$ . Obtém-se assim a linha SML, ou recta valor-mercado.

A folha de cálculo que faz estas operações é parecida com a que calcula a matriz de variâncias-covariâncias. Baseia-se na ideia de copiar sucessivamente os ganhos para dentro de um domínio de trabalho COPY(I). Um outro domínio, chamado PRODUCT, calcula então a seguinte expressão:

`(+COPY(I)-$MEAN(I))*(S&P(I)-$MEAN(S&P))`

Assim, a média do domínio PRODUCT será a covariância dos ganhos  $i$  com o índice S&P 500. Basta dividir esta média pela variância deste índice para se obter  $\beta_i$ , o Beta do título  $i$ . Se existir um registo com a fórmula

`@AVG($PRODUCT)/+$VAR(S&P)`

ele conterá o  $\beta_i$  do título que tiver sido copiado para o domínio COPY(I). As macros que se propõem a seguir limitam-se a copiar sucessivas séries temporais para dentro de COPY(I) e depois a copiarem o valor da célula onde está a fórmula acima, chamada BETA(I), para a sua posição no vector-linha de resultados.

## 4.2 A Recta Valor-Mercado

Uma vez obtidos os  $\beta$  para cada título, pode construir-se uma tabela onde, a um ganho esperado,  $E(R_i)$ , corresponda o respectivo  $\beta_i$ . A partir desta tabela é possível testar o grau em que o conjunto de títulos examinado obedece à recta valor-mercado (SML). Para isso, constrói-se um modelo linear onde os  $\beta$  explicam os ganhos esperados.

61

Numa folha de cálculo comum isto pode levar-se a cabo com o comando que produz regressões simples. A variável dependente é a colecção de  $E(R_i)$  e a variável independente é a colecção dos  $\beta_i$ . Assim, procura-se descobrir qual a recta  $y_i = \alpha + b_i x_i$  que minimiza a soma das diferenças quadráticas entre os ganhos esperados reais e os ganhos esperados tais como seriam se fossem determinados pelos  $\beta_i$ , isto é, se a SML fosse uma hipótese válida.

Betas	Retornos	rt esp	Titulo:
(X)	(Y)	(prd Y)	
0.091021	0.018508	0.008823	CONED
0.212632	-0.00421	0.009490	PSNH
0.267764	0.016583	0.009792	GENMIL
0.453024	0.009616	0.010808	IBM
.	.	.	.
1.028159	0.007483	0.013962	DATGEN
1.055494	0.025008	0.014112	TANDY

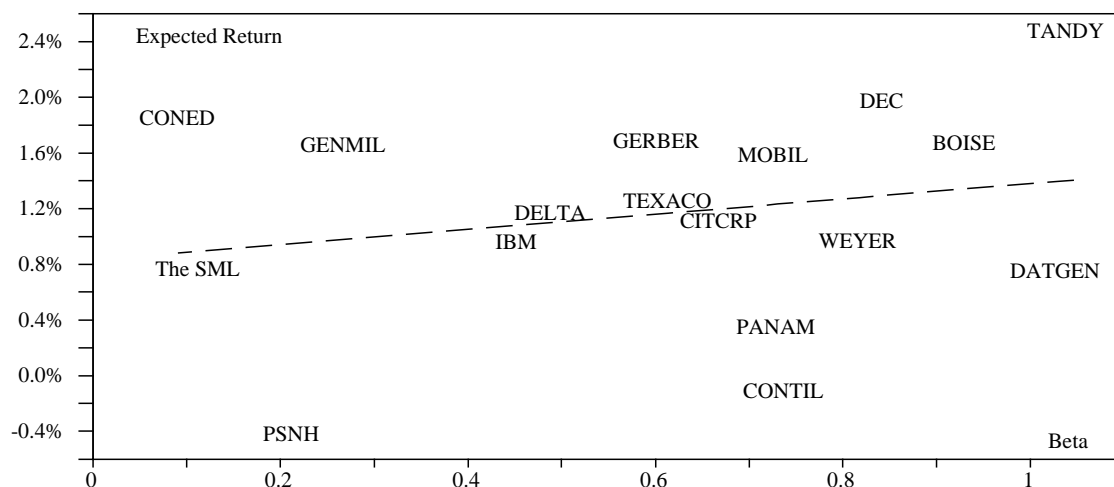


Figura 15: A linha valor-mercado (SML) para alguns títulos cotados na Bolsa de Nova York.

Neste caso concreto obter-se-ia um  $R^2$  muito baixo, denotando um muito fraco poder explicativo dos Betas sobre os ganhos esperados:

Constante (alfa)	0.008324	N. de Observacoes	16
R Quadrado	0.040077	Coefficiente de X (inclinação)	0.005483

Só cerca de 4% da variabilidade dos ganhos esperados é explicada pelos Beta. Para amostras com 16 casos, não chega a ser estatisticamente significativo. Pode portanto concluir-se de que, no caso da carteira escolhida, a recta SML — e portanto o CAPM — não explica os ganhos observados nos títulos que a compoem. A figura 15 mostra a recta SML e a posição de cada activo num espaço ganhos-Betas.

**62. Teste de  $R_f$ :** Vale a pena comparar  $\alpha$ , o termo constante ou intercepção da SML com o eixo dos Y, com o ganho esperado para quem detém Títulos do Tesouro. Se a forma inicial do CAPM fosse válida, estes ganhos deveriam ser semelhantes. Mas também aqui há diferenças: O  $\alpha$  obtido para a SML é da ordem dos 0,8% ao passo que o ganho supostamente isento de risco ronda os 0.68%. Este facto não é porém considerado na literatura como tão perturbador como o fraco significado estatístico dos Betas.

### 4.3 Será a Carteira do Mercado Meramente Eficiente?

No exercício proposto no fim do capítulo 3 apresentaram-se cinco carteiras eficientes construidas a partir de diferentes proporções de quatro títulos. Na figura 14, página 50, pode

ver-se a posição ocupada por estes títulos no espaço do ganho esperado vs. risco.

Roll (1978) [33] fornece onze outras carteiras feitas a partir dos mesmos quatro títulos originais e nota o seguinte: Supondo que a última das cinco carteiras era  $M$ , a que representava os movimentos do mercado como um todo, as onze novas carteiras teriam os seguintes Betas e ganhos esperados:

portfolio	asset proportions:				expected return	Beta
	activo A	activo B	activo C	activo D		
6	1	0	0	0	6	0.417092
7	0	1	0	0	7	0.805712
8	0	0	1	0	8	1.19515
9	0	0	0	1	9	1.583769
10	0.5	0.5	0	0	6.5	0.611402
11	0.333333	0.333333	0.333333	0	6.999993	0.805984
12	0.4	0.3	0.2	0.1	7	0.805957
13	0.25	0.25	0.25	0.25	7.5	1.000431
14	0.1	0.2	0.3	0.4	8	1.194904
15	0	0.333333	0.333333	0.333333	7.999992	1.194876
16	0	0	0.5	0.5	8.5	1.389459

A SML obtida com esta colecção de carteiras teria um peso muito diferente da obtida anteriormente para casos reais:

Regression Output:		
Constant	4.927959	No. of Observations 11
Std Err of Y Est	0.000327	X Coefficient(s) 2.570932
R Squared	0.999999	Std Err of Coef. 0.000298

Agora, o  $R^2$  é quase 100%. Quer isto dizer que a carteira número cinco, — a que foi tomada como representando o mercado — era de facto  $M$ ? Roll responde que não. A carteira cinco é apenas uma carteira eficiente. Se este teste fosse repetido tomando as carteiras um, dois, etc., ou qualquer outra que fosse eficiente como sendo o mercado, obter-se-iam  $R^2$  tão próximos de 100% como o deste caso. A conclusão é que o CAPM não expressa uma relação que tenha a ver directamente com o mercado, mas apenas com a eficiência.



## 4.4 Betas e Robustez

Mais do que tudo o que foi dito, interessará reter o facto de que os Beta representam sensibilidades de activos a variações inesperadas nas diversas forças económicas, tecnológicas, sociais e políticas que porventura afectem os mercados.

Um Beta elevado significa grande sensibilidade. Qualquer movimento do mercado é ampliado por tal activo. Um beta com um valor proximo da unidade significa uma sensibilidade igual à media do mercado. Um beta de zero indica total insensibilidade e, por fim, um Beta negativo indicaria sensibilidade mas em sentido contrário: a cotação sobe quando o mercado desce.

**63. Flexibilidade e sensibilidade:** Interessa perguntar de onde vem essa sensibilidade ou essa indiferença. Como vimos no capítulo sobre planeamento financeiro, as empresas possuem dois tipos de características. Umas, mais relacionadas com a política de endividamento, de distribuição de dividendos e outras, pertencem ao tipo que os gestores podem modificar e portanto ajustar a mudanças que porventura se venham a dar na economia. Essas características representam a parte *flexível* da empresa.

Outras características, porém, dificilmente se modificam ou, quando mudam, não costumam ser por vontade dos gestores mas sim por motivos que lhes escapam. É o caso, por exemplo, dos preços de venda e compra, as margens, os salários, em suma, quase tudo o que é operacional. De facto, numa economia onde existe concorrência, as margens já foram esticadas até ao limite e portanto pouco se pode ganhar com melhoras operativas—a não ser que sejamos Japoneses, é claro. Estas características rígidas representam a parte *sensível* da empresa.

64 Os Betas reflectem basicamente este segundo tipo de características. Quanto mais rígida uma empresa é, quanto mais incapaz de comandar e modificar depressa e por sua propria iniciativa as suas características de modo a adaptar-se a mudanças inesperadas, tanto maior será o seu Beta em valor absoluto. É por isso que a este Beta se chama risco.

**65. Robustez e Ganho:** É sabido que o mercado premeia o risco pois se assim não fosse ninguém arriscava. Portanto, os ganhos esperados de activos com Betas elevados serão, em media, maiores do que os de baixo risco. Diz-se de activos com baixo risco que são *robustos*, sendo esta uma função inversa da sensibilidade como se viu. Estes dois adjectivos ajudam a compreender melhor a realidade que se esconde por detrás de conceitos como risco e

volatilidade de ganhos.

Quais as características das empresas robustas? Entre outras interessa reter:

- A ausência ou o controlo da concorrência, obtido por meios legais (monopólios ou oligopólios protegidos por leis de contingenciação ou outras) ou não-legais (conluio entre concorrentes para fixar preços). Existem abundantes exemplos de tal situação na economia portuguesa: a banca, os seguros, a grande maioria dos transportes públicos, as tele-comunicações, o grande retalho, são tudo negócios permitidos a uns poucos e vedados a muitos outros por intervenção directa do Estado. Os felizes contemplados, por sua vez, entram em conluio para fixar preços, taxas, *spreads* e isso, em Portugal, não é ilegal). Mesmo certos pequenos negócios como farmácias ou taxis, são contingenciados.
- A grande intensividade do capital, o que pode inibir a concorrência durante largos períodos. É o caso das empresas de comunicações ou de fabrico de aeronaves.

Existem ainda empresas que são robustas a mudanças inesperadas em certas forças económicas mas não outras. O retalho, por exemplo, é robusto perante aumentos da taxa de inflação mas ressentem-se com a economia.

## Capítulo 5

# O Comportamento Estatístico das Cotações

Este capítulo introduz uma série de conceitos necessários ao estudo e modelação do preço de Opções e à simulação de series temporais contendo cotações de activos em mercados. Em primeiro lugar, modelar-se-á a distribuição de Gauss ou Normal. Daqui, passar-se-á à distribuição Lognormal e aos mecanismos que representam o comportamento das cotações em mercados de capitais. Por fim, far-se-á a simulação de tais series.

### 5.1 A Distribuição Normal

A distribuição de Gauss ou Normal ocupa um lugar central no estudo do comportamento estatístico de muitos fenómenos. A razão para isto é o facto de existir uma tendência para os mecanismos que resultam de muitas causas independentes onde os efeitos não se acumulam, originarem fenómenos estatísticos Gaussianos.

A distribuição Normal — através de outras derivadas dela — é essencial em qualquer estudo que pretenda quantificar o risco associado às cotações em mercados de capitais e para se modelar o preço das opções. Nesta secção procura-se responder à pergunta puramente técnica de como gerar a distribuição de Gauss numa folha de cálculo. Na secção 5.2 passar-se-á da distribuição Normal para a Lognormal, que é a que realmente interessa explorar. Na secção 5.4 aprender-se-á a calcular os parâmetros de uma distribuição. Por fim, nas secções 5.5 e seguintes, estudar-se-á a natureza estatística das cotações e o modo de as simular.

**66. Como calcular a distribuição Normal:** Uma variável aleatória  $x$  diz-se Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  se a sua distribuição é dada por

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \frac{-(v - \mu)^2}{2\sigma^2} dv$$

Quando  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$  a distribuição chama-se *estandardizada* e representa-se  $N(x)$ . O integral  $N(x)$  não se deixa calcular directamente, isto é, com métodos analíticos. Porém, é possível obter uma boa aproximação usando a expressão

$$N(x) = 1 - h(x) \times t \times (b_0 + b_1 \times t + b_2 \times t^2 + b_3 \times t^3 + b_4 \times t^4) + \varepsilon, \quad \text{para } x > 0$$

onde

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( \frac{-x^2}{2} \right), \quad \text{e } t = \frac{1}{1 + px}$$

com constantes cujos valores são

$$\begin{aligned} p &= +0.2316419 \\ b_0 &= +0.319381530 \\ b_1 &= -0.356563782 \\ b_2 &= +1.781477937 \\ b_3 &= -1.821255978 \\ b_4 &= +1.330274429 \end{aligned}$$

O erro deste desenvolvimento em série,  $\varepsilon$ , é menor do que  $7.5 \times 10^{-8}$ . Para se acharem os  $N(x)$  quando  $x \leq 0$  basta notar que  $N(x) = 1 - N(-x)$ .

**67. Em folha de cálculo:** O cálculo da distribuição Normal é indispensável a muitas tarefas de modelação financeira. De uma maneira ou de outra, a tarefa de avaliar qual a probabilidade associada a um dado  $x$  aparece na base de simulações e outros cálculos envolvendo cotações ou o preço de opções.

**68** Pode criar-se uma tabela da distribuição Normal no 123. O primeiro passo consiste em criar uma coluna onde se contenham as fórmulas e constantes descritas acima. Depois, usam-se os comandos RANGE NAMES LABELS RIGHT para dar às células imediatamente à direita desta coluna os nomes que figuram na coluna que se acabou de criar. Por último, introduzem-se as fórmulas e constantes referidas acima. Eis uma listagem das duas primeiras colunas da folha de cálculo mostrando as fórmulas:

x	-3	-2.9	-2.8	...	-0.5	...	0	...	0.5	...	2.9	3
N(x)	0.0013	0.0018	0.0025	...	0.3085	...	0.4999	...	0.6914	...	0.9981	0.9986
s(x)	0.0013	0.0018	0.0025		0.3085		0.4999		0.3085		0.0018	0.0013
h(x)	0.0044	0.0059	0.0079		0.3520		0.3989		0.3520		0.0059	0.0044
t	0.5899	0.5981	0.6065		0.8962		1		0.8962		0.5981	0.5899
p	0.2316											
b(0)	0.3193											
b(1)	-0.356											
b(2)	1.7814											
b(3)	-1.821											
b(4)	1.3302											

Figura 16: Possível disposição de elementos na folha de cálculo para avaliar a distribuição Normal.

x	3	-2.9	-2.8	-2.7	...
N(x)	@IF(X>0,1-S(X),S(X))				
s(x)	+H(X)*T*(\$B(0)+\$B(1)*T+\$B(2)*T^2+\$B(3)*T^3+\$B(4)*T^4)				
h(x)	(1/@SQRT(2*@PI))*@EXP(-X^2/2)				
t	@IF(X>0,1/(1+\$P*X),1/(1-\$P*X))				
p	0.231641900				
b(0)	0.319381530				
...	...				

Note-se que, como o objectivo é copiar a segunda coluna de modo a obter uma tabela de  $N(x)$  para diversos valores de  $x$ , convirá tornar absolutas as referências apropriadas. Repare-se também na necessidade de considerar diferentemente os cálculos para  $x > 0$  de aqueles onde  $x \leq 0$ . Este facto leva ao uso da função IF nas fórmulas e à introdução da linha  $s(x)$ . Esta linha torna possível calcular  $N(x)$  sem ter de recorrer a fórmulas demasiado compridas.

O aspecto final da folha de cálculo, depois de definido um domínio de valores considerados interessantes para  $x$  desde  $-3$  até  $+3$  com intervalos de  $0.1$ , seria o que a figura 16, página 61 ilustra. Estes resultados foram obtidos copiando simplesmente a segunda coluna para as seguintes. Mas podiam também obter-se recorrendo ao comando DATA TABLE 1.

**69. Significado de  $N(x)$ :**  $N(x)$  é a probabilidade de se vir a obter um valor de  $x$  igual ou menor do que aquele que figura na primeira linha, quando  $x$  é uma variável aleatória Gaussiana, com um valor esperado de zero e uma variância igual à unidade. Isto, é claro, quando não se sabe mais nada acerca dos  $x$  futuros. A probabilidade associada ao facto de

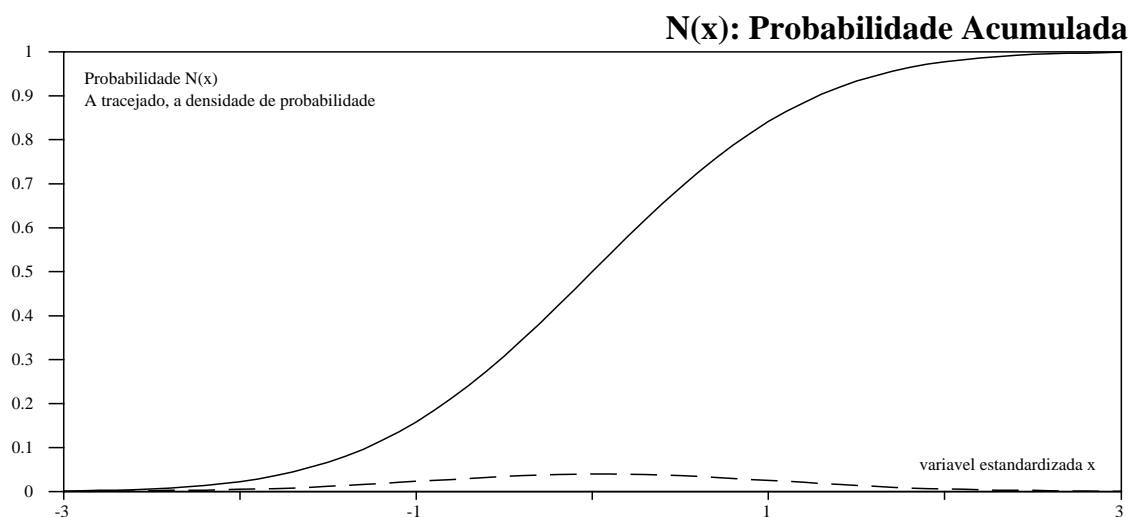


Figura 17: O aspecto gráfico da tabela obtida acima. A tracejado, uma aproximação da função densidade de probabilidade, a partir de simples diferenças.

se poder vir a obter um valor de  $x$  contido num dado intervalo pode achar-se subtraindo os  $N(x)$  dos extremos desse intervalo.

**70** Chama-se *Função Densidade de Probabilidade* à derivada de  $N(x)$  em ordem a  $x$ . Na figura 17 podem ver-se, tanto  $N(x)$  como a função densidade de probabilidade.

**71. O caso geral:** No caso de variáveis aleatórias não estandardizadas — aquelas cujo valor esperado não é zero e cuja variância não é a unidade —, basta estandardizar antes de consultar a tabela. Um valor estandardizado,  $Z$ , obtém-se a partir de outro não-estandardizado por centragem e normalização:

$$\text{Variável estandardizada} = \frac{\text{Variável não estandardizada} - \text{Valor esperado}}{\sqrt{\text{Variância}}}$$

## 5.2 Caracterização Estatística das Cotações

Quais serão os pressupostos a aceitar acerca da forma como as cotações evoluem ao longo do tempo em mercados de capitais? As cotações são incertas e dependem — em alguma medida e de uma maneira ou de outra — do movimento do mercado como um todo. Mas qual é a sua distribuição? Uma forma de aproximar esta questão será o aceitar umas quantas características como básicas e depois obter a forma analítica que a elas obedece. Listam-se a seguir cinco características aceites como próprias das séries temporais de cotações:

1. As cotações futuras são incertas.

2. As cotações nunca são zero (excluem-se as firmas que morreram).
3. O ganho que se obtém com um activo cotado tende a crescer com o tempo.
4. As variações na cotação de um activo são contínuas. Para períodos de tempo curtos, estas mudanças são pequenas e tendem para zero com a duração do período.
5. A *incerteza* com o ganho resultante de possuir um activo também tende a crescer com o período de posse. A variância observada em cotações é maior para um mês do que para uma semana, e é maior para um ano do que para um mês.

Chame-se  $S_t$  à cotação de um activo no instante  $t$ . Uma forma de descrever a incerteza acerca de  $S_t$  (de modo a que esta incerteza seja compatível com os pressupostos enunciados acima) consiste em supôr que as variações observadas numa cotação entre o instante  $t$  e o instante  $t + \tau$  podem ser divididas em dois componentes ou efeitos: Um que é previsível, esperado, e portanto não contém incerteza. Outro, que é incerto e portanto imprevisível e inesperado.

Mais, vai-se supôr que uma dada cotação cresce exponencialmente quando é inteiramente previsível. De facto, na ausência de incerteza, a cotação de qualquer activo é semelhante ao valor de um número determinado de Bilhetes do Tesouro que rendessem um juro  $\mu$ , continuamente acrescentado ao valor do activo.

72

Ver-se-á agora que a equação

$$S_{t+\tau} = S_t \times \exp(\mu \times \tau + \sigma \times \sqrt{\tau} \times Z) \quad (22)$$

implementa as condições acima.  $Z$  representa aqui uma variável aleatória Gaussiana estandardizada.

Em primeiro lugar, repare-se como a equação (22) modela uma componente determinística e outra incerta. Com  $\sigma = 0$  ter-se-ia

$$S_{t+\tau} = S_t \times \exp(\mu \times \tau)$$

É este o efeito previsível.  $\sigma$ , por seu lado, introduz uma aleatoriedade Gaussiana crescente neste processo. Para  $\sigma$  maiores do que zero, embora a tendência geral da cotação do activo seja para crescer, existe um elemento incerto, normalmente distribuído, que irá influenciar a série resultante.

De acordo com a equação (22), as cotações nunca são negativas. O significado analítico deste processo pode expressar-se sob a forma de uma sequência de operações:

1. Considere-se um intervalo de tempo  $\tau$  que pode ser grande ou pequeno.
2. Multiplique-se uma dada taxa de crescimento,  $\mu$ , por esse intervalo. Obtém-se assim um efeito determinístico ou previsível para o crescimento das cotações.
3. Tome-se uma amostra de uma variável aleatória normalmente distribuída e multiplique-se por  $\sqrt{\tau}$  e pela dispersão,  $\sigma$ . Esta é a porção incerta das cotações. O facto de se tomar a raiz quadrada do intervalo de tempo implica que a variância do logaritmo dos ganhos é constante ao longo do tempo, como se verá.
4. Adicionem-se os dois efeitos e exponencie-se.

Esta construção de (22) peça a peça é interessante por revelar o mecanismo que se pretende simular. Um passo seguinte na compreensão de tal mecanismo será o estudo analítico das consequências de tal modelo. Assim, dividindo por  $S_t$  e tomando o logaritmo de ambos os lados, tem-se:

$$\log \left( \frac{S_{t+\tau}}{S_t} \right) = \mu \times \tau + \sigma \times \sqrt{\tau} \times Z \quad (23)$$

Ver-se-á mais abaixo que esta expressão tem um comportamento semelhante ao de um ganho logarítmico. De momento, como o valor esperado para  $Z$  é zero, o valor esperado para a expressão acima é:

$$E \left[ \log \left( \frac{S_{t+\tau}}{S_t} \right) \right] = \mu \times \tau$$

Por sua vez a variância será:

$$\text{VAR} \left[ \log \left( \frac{S_{t+\tau}}{S_t} \right) \right] = \sigma^2 \times \tau$$

Vê-se portanto que os pressupostos acima ficam cumpridos com o modelo que a equação (22) representa.

**73**

O nome *distribuição Lognormal* aplica-se a processos como os modelados acima. Este nome vem-lhe do facto dos logaritmos dos ganhos serem Normais, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Sob o ponto de vista do mecanismo que a origina, a distribuição Lognormal tem em comum com a de Gauss o facto de ambas serem o resultado de muitas pequenas perturbações independentes que actuam sobre uma dada variável. Porém, enquanto que no caso da distribuição de Gauss o efeito dessas perturbações é constante, os mecanismos Lognormais incorporam as perturbações na própria variável e portanto dá-se uma acumulação.



```

Gauss: Densidade de Probabilidades
N(x+1)-N(x):      0.000515 0.000689 0.000911    ...    0.000689 0.000515
Z                  -2.95    -2.85    -2.75    ...    2.85    2.95

Lognormal: Densidade de Probabilidades
media              0.2
sigma              0.5
tau                1
L(Z) = S          0.279430 0.293757 0.308818    ...    5.078419 5.338795

```

Figura 18: Possível disposição de elementos na folha de cálculo para avaliar a distribuição Lognormal.

A distribuição Lognormal tem uma enorme importância e aplicação em Economia e Finanças pois é ela que modela alguns processos acumulativos como o crescimento de empresas ou de fortunas. Um estudo muito completo da distribuição Lognormal e de algumas das suas aplicações pode encontrar-se no clássico livro de Aitchison & Brown (1957) [1].

### 5.3 Os Processos de Difusão Multiplicativos

Usar-se-á agora a folha de cálculo desenvolvida na secção 5.1 para calcular a densidade de probabilidades de uma distribuição Lognormal. Em primeiro lugar, deve obter-se a densidade de probabilidade Gaussiana. Para isso, basta determinarem-se as primeiras diferenças  $N(x_i) - N(x_{i-1})$ . Um pouco mais de refinamento consistirá em escolher o ponto intermédio deste intervalo

$$Z = x_i + \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$$

como o valor da variável aleatória. Isto equivale a unir a probabilidade associada a um intervalo com o seu ponto intermédio, o que é a melhor aproximação.

A distribuição Lognormal obtém-se agora aplicando a equação (22), que transforma os  $Z$  — variável aleatória estandardizada Gaussiana — em  $S$  — variável Lognormal —. No caso presente tal transformação irá aparecer em 123 com este aspecto:

```

@EXP($MEDIA*$TAU+$SIGMA*@SQRT($TAU)*Z)

```

A parte da folha de cálculo que determina  $S$  ficaria como a figura 18, página 65, ilustra.

74 Pode agora construir-se um gráfico onde  $S$  figura em abcissas e as probabilidades correspondentes,  $N(x+1) - N(x)$  em ordenadas. Ele mostra o aspecto de uma distribuição Lognormal da densidade de Probabilidades (ver a figura 19).

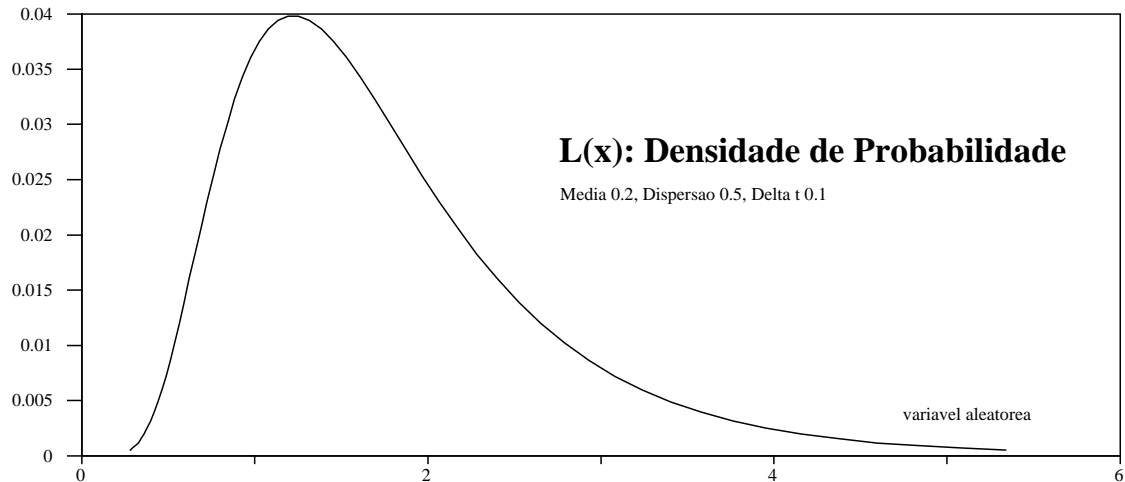


Figura 19: O aspecto gráfico da função densidade de probabilidade Lognormal obtida por exponenciação de  $Z$ .

## 5.4 Determinação dos Parâmetros de uma Distribuição

Vai-se agora abordar o problema de, a partir de uma colecção de cotações mensais de um título, determinar os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  da distribuição logarítmica *anual* dos seus ganhos.

**75** Note-se em primeiro lugar que os ganhos  $R_t$ , tal como foram introduzidos no capítulo 3 (fórmula 8), permitem a seguinte manipulação:

$$1 + R_t = 1 + \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

E portanto, de acordo com (23),

$$\log(1 + R_t) = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \mu \times \tau + \sigma \times \sqrt{\tau} \times Z$$

Os  $\log(1 + R_t)$  são chamados *ganhos logarítmicos*. Expressam o mesmo que os  $R_t$  mas são preferidos nos estudos estatísticos.

O raciocínio acima mostra que os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  podem ser estimados a partir dos ganhos passados. De facto, já foi verificado (secção 5.2) que o valor esperado e o desvio-padrão de  $\mu \times \tau + \sigma \times \sqrt{\tau} \times Z$  são, respectivamente,  $\mu \times \tau$  e  $\sigma \times \sqrt{\tau}$ .

**76. Como transformar parâmetros mensais em anuais:** O papel de  $\tau$  no cálculo dos parâmetros fica mais claro quando se repara que, escrevendo (22) como uma simples exponenciação de ganhos,

$$S_{t+\tau} = S_t \times \exp(R)$$

mes	cotacao fecho	1+ ganho	log 1+ganho	
0	25			
1	24.69219	0.987687	-0.01238	
2	23.6876	0.959315	-0.04153	
3	22.88975	0.966317	-0.03426	
4	22.80182	0.996158	-0.00384	media
5	22.88009	1.003432	0.003426	0.072873 <- @AVG(LOG(1+GANHO))*12
6	22.5618	0.986088	-0.01400	
7	23.93675	1.060941	0.059156	dispersao
8	24.36041	1.017699	0.017544	0.099871 <- @STD(LOG(1+GANHO))*@SQRT(12)
9	24.97833	1.025365	0.025049	
10	26.08291	1.044221	0.043271	
11	26.12551	1.001633	0.001631	
12	26.88987	1.029257	0.028837	

Figura 20: Dados referentes à estimação dos parâmetros anuais subjacentes a uma cotação mensal.

o logaritmo de  $R$  tem média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ . Assim, se  $t$  indica meses, a cotação no fim do ano,  $S_{12}$ , seria:

$$S_{t+\tau} = S_t \times \exp(R_1 + R_2 + \dots + R_{12})$$

Se assumirmos que os ganhos logarítmicos  $R_1 + R_2 + \dots + R_{12}$  são independentes uns dos outros, então o ganho logarítmico anual,

$$\log \frac{S_{12}}{S_0},$$

terá um valor esperado de  $\mu \times 12$  e uma variância de  $\sigma^2 \times 12$ . Quando  $\mu$  e  $\sigma$  são calculados a partir de dados mensais, se o objectivo é a estimação de dados anuais — e é um costume aceite fazê-lo — será preciso aplicar os factores acima.

**77. Implementação:** Como exemplo, é dado um conjunto de cotações mensais durante um periodo de um ano. Para obter uma estimação dos parâmetros da sua distribuição, constroi-se uma coluna com  $\log(1 + R_t)$ . A média desta coluna será uma estimação de  $\mu$  e o desvio-padrão uma estimação de  $\sigma$ . Para se obterem valores anuais é preciso entrar em conta com o número de meses. O aspecto deste exemplo seria o que se mostra na figura 20, página 67.

## 5.5 Processos de Difusão

É útil e instrutivo gerar números que podiam ter saído dum mecanismo Gaussiano ou de outro Lognormal. Esta secção explica como fazê-lo. O método usado pode encontrar-se, descrito com detalhe, em Knut (1981) [21]. Também nesta secção se verá como aplicar tais desenvolvimentos à simulação de cotações de títulos cotados na Bolsa ou de outros activos vendidos e comprados livremente.

**78. A base analítica:** O método para simular números aleatórios obedecendo a um mecanismo Gaussiano pode descrever-se em quatro etapas:

1. Gerar duas variáveis aleatórias independentes, uniformemente distribuídas entre  $-1$  e  $+1$ . Como a função @RAND do 123 produz números uniformemente distribuídos entre 0 e 1, pode tomar-se  $2 \times \text{@RAND} - 1$ . Estes dois números são  $r_1$  e  $r_2$ .
2. Calcular  $S(1) = r_1^2 + r_2^2$ . Se este  $S(1)$  for menor do que a unidade continue-se para o passo seguinte. Caso contrário tente-se de novo gerar dois números aleatórios até que eles verifiquem a condição acima.
3. Uma vez achado um par  $\{r_1, r_2\}$  que satisfaça a referida condição, achar:

$$s(2) = \left[ \frac{-2 \times \log S(1)}{S(1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

4. Seja finalmente  $X(1) = S(2) \times r_1$  e  $X(2) = S(2) \times r_2$ .

$X(1)$  e  $X(2)$  são duas variáveis aleatórias independentes com um comportamento Gaussiano.

**79. Implementação:** Uma possível forma de implementar o algoritmo descrito acima será usando a possibilidade de construir programas simples, as macros, em folha de cálculo como a 123. O exemplo aqui dado gera uma colecção de números aleatórios Gaussianos e permite produzir tabelas de frequências.

**80** Em primeiro lugar é preciso dar nomes a um conjunto de células de que as macros se vão servir. Estes nomes estão listados na tabela 1 e encontram a sua explicação nas fórmulas apresentadas acima. O domínio RESULTS é um vector-coluna com tantas células quantas *o dobro* da quantidade registada em TOT NUM. Se desejamos obter 2.000 casos distribuídos normalmente, TOT NUM deverá ter, no início da execução, o valor 1.000 e o

COUNTER	...	RESULTS	Vector-coluna para os resultados
ELAPSED		$r_1$	Registo do primeiro RAND
STARTTIME		$r_2$	Registo do segundo RAND
STOPTIME		S(1)	Registo para $S(1)$
		S(2)	Registo para $S(2)$
\ A	...	TOT NUM	Total Número de casos desejado
\ B		X(1)	Registo para a primeira série Gaussiana
\ C		X(2)	Registo para a segunda série Gaussiana

Tabela 1: Lista dos nomes de domínios ou registos a definir. Do lado esquerdo, os registos auxiliares. Do lado direito, os que são específicos deste problema.

vector RESULTS deverá ter 2.000 células. Isto é assim porque as macros colocam ambas as séries obtidas no mesmo domínio.

**81. As macros:** A primeira macro, A, inicializa os contadores e obriga depois a macro B a ser executada o número de vezes pretendido (TOT NUM). Depois, termina. Eis a sua listagem:

```
blank RESULTS
for COUNTER,1,TOT_NUM,1,B
quit
```

A macro B executa os cálculos. Note-se como as primeiras quatro linhas desta macro se destinam à geração de números aleatórios distribuídos uniformemente, mas tais que  $S(1)$  é menor do que a unidade. Quando os valores gerados não obedecem a esta condição, o controlo volta ao início da macro para nova tentativa. Comparem-se as fórmulas desta macro com as expressões acima, nomeadamente (24). Eis a listagem da macro B:

```
let r_1,2*@rand-1
let r_2,2*@rand-1
let S(1),r_1^2+r_2^2
if S(1)>=1 branch B
let S(2),@sqrt(-2*@ln(S(1))/S(1))
let X(1),r_1*S(2)
let X(2),r_2*S(2)
branch C
```

A macro C é a encarregada de colocar os valores obtidos, os  $X(1)$  e  $X(2)$ , sequencialmente no vector-coluna RESULTS. Depois, sob o controlo do loop da macro A, o processo de geração de novos valores prossegue até se atingir o total desejado. Eis a listagem de C:

```
put RESULTS,0,2*COUNTER-2,X(1)
put RESULTS,0,2*COUNTER-1,X(2)
```

Uma possível disposição dos registos e domínios na folha de cálculo é a que a figura 22, na página 71, ilustra.

**82. Como calcular as frequências esperadas:** Depois de obtida a coleção de  $2 \times \text{TOT NUM}$  valores, é interessante ver qual o aspecto da sua distribuição. Podem para isso usar-se comandos de folhas de cálculo. Define-se primeiro um conjunto de intervalos que cubram o domínio  $\{-3, +3\}$ , tal como se vê na figura 22 do lado direito. Depois, usa-se DATA DISTRIBUTION para obter o número de casos que se observaram dentro de cada intervalo.

Podem agora comparar-se estas frequências com as frequências teóricas que deviam obter-se no caso de perfeita Normalidade.

Para determinar as frequências teóricas, gera-se primeiro uma tabela de probabilidades Gaussiana que corresponda aos intervalos usados. Basta proceder como na secção 5.1. Depois, determina-se por simples diferença qual é a probabilidade de ocorrência de casos dentro de cada um dos intervalos definidos. Por exemplo, o método descrito na secção 5.1 ou a simples consulta de tabelas, dir-nos-ia que a probabilidade de obter um caso com um valor igual ou menor do que 0.6 é  $N(0.6) = 0.274253$  e a probabilidade de obter um caso com um valor igual ou menor do que 0.8 é  $N(0.8) = 0.211855$ . portanto, a probabilidade de obter um caso no intervalo  $\{0.6, 0.8\}$  é a diferença  $0.274253 - 0.211855 = 0.062398$ .

Por último, multiplica-se cada uma dessas probabilidades pelo número total de casos simulados (no exemplo acima, 2.000) e obtém-se uma frequência esperada. A figura 21 compara graficamente as frequências reais obtidas nesta simulação com as que se deveriam obter no caso de perfeita Normalidade. Vê-se que o ajuste da distribuição simulada à teórica não é mau. Ele ainda pareceria melhor para um número de intervalos mais reduzido.

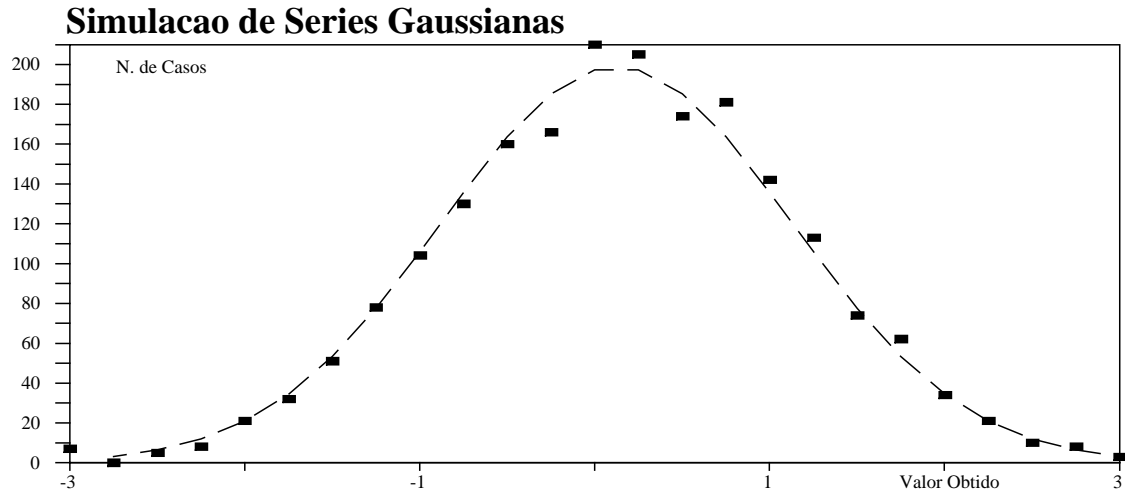


Figura 21: O aspecto gráfico da distribuição de frequências simulada. A tracejado, os valores esperados no caso de perfeita Normalidade.

```

r_1  0.526645
r_2  0.741081
S(1) 0.826557
S(2) 0.678906
X(1) 0.357543
X(2) 0.503124

```

0.843771 RESULTADOS		Distribuicao de Frequencias:		
	intervalo	n casos	prob.	pred.
-0.17631	-3	7		
-0.23663	-2.75	0	0.001629	3.26
.	.			.
.	.			.
-0.85560	-0.25	166	0.092756	185.51
-0.27746	0	210	0.098706	197.41
-0.07981	0.25	205	0.098706	197.41
.	.			.
.	.			.
-0.33055	2.75	8	0.003229	6.46
0.363363	3	3	0.001629	3.26
-0.16626		1		
.				
.				

Figura 22: Uma possível disposição dos domínios e registos da folha de cálculo onde se simula a distribuição de Gauss. Do lado direito, a tabela de frequências observadas e esperadas para um intervalo de largura 0.25.

TAU	Registo para $\tau$
IN PRICE	Registo onde se coloca a cotação inicial
MEAN	Registo onde se coloca $\mu$
STDEV	Registo onde se coloca $\sigma$
RESULTS	Passa a ter duas colunas

Tabela 2: Lista dos nomes de domínios ou registos a acrescentar aos já existente na folha de cálculo que simula a distribuição de Gauss.

## 5.6 A Simulação de Cotações

Uma vez sabendo como simular um processo Gaussiano, está-se em condições de simular o mecanismo Lognormal das cotações. Em muitas aplicações em Finanças isto é importante, não apenas para tornar os dados simulados mais realistas mas também para ganhar sensibilidade ao comportamento das cotações em mercados de capitais e outros.

Suponha-se que a cotação de um activo é distribuído Lognormalmente, com um log-valor esperado anual de  $\mu$  e uma log-dispersão de  $\sigma$ . Se  $S_0$  é o preço a pagar por um título ou acção desse activo, então, depois de um intervalo de tempo  $\tau$ , o preço a pagar por essa acção será, como vimos,

$$S_\tau = S_0 \times \exp(\mu \times \tau + \sigma \times \sqrt{\tau} \times Z)$$

$Z$  é uma realização de uma variável Gaussiana estandardizada. Para qualquer intervalo  $t$ , a cotação refere-se sempre à cotação anterior:

$$S_{t+\tau} = S_t \times \exp(\mu \times \tau + \sigma \times \sqrt{\tau} \times Z)$$

como já se viu. Para tornar esta fórmula de uso prático em simulação de cotações basta determinar os seus parâmetros. Vai-se mostrar como é possível implementá-la, com uns poucos acrescentos, na folha de cálculo já usada para simular processos Gaussianos (secção 5.5).

**83. Um exemplo em 123:** Hoje, a cotação de um título é 25. Sabe-se que este preço se distribui lognormalmente, com um ganho logarítmico anual de 4% e uma dispersão logarítmica anual de 10%. Pretende-se estudar o comportamento diário da cotação deste título ao longo de um ano.

Existe um número infinito de possíveis percursos para este preço. Vai-se simular um deles. De cada vez que se executar esta simulação, outro percurso surgirá. Toma-se como



```

start t 16:34:30   r_1  -0.25388      media  0.04
stop t 16:34:34   r_2  -0.27883      desv.p 0.1
elapsed 00:00:04  S(1)  0.14220      tau    0.004
counter    126    S(2)  5.23747      cot.inic. 25
tot n.     125    X(1) -1.32971
           125    X(2) -1.46041

```

```

RESULTADOS
      25      0
24.88354    1
.           .
.           .
.           .
24.86586   249
24.95101   250

```

Figura 23: Uma possível disposição dos domínios e registos da folha de cálculo onde se simulam cotações.

$n = 250$  o número de dias por ano em que a Bolsa funciona. Assim, bastaria resolver a equação acima  $t$  vezes, ( $t = 0, 250$ ), com  $\mu = 0.04$ ,  $\sigma = 0.1$  e  $\tau = 1/250$ , para obter o processo pretendido. Isto é,

$$S_{t+1} = S_t \times \exp \left( \frac{0.04}{250} + 0.1 \times \sqrt{\frac{1}{250}} \times Z \right) \quad (25)$$

Porém, uma vez que já existem as macros necessárias à simulação de  $Z$ , é mais económico introduzir na última delas umas linhas destinadas ao cálculo de (25).

No exemplo que se segue, parte-se da folha de cálculo usada para simular a distribuição de Gauss. Há três modificações a fazer:

1. definir alguns novos registos (a sua lista está na tabela 2),
2. modificar as macros A e C,
3. alargar o vector RESULTS de modo a passar a ter duas colunas.

Na segunda coluna de RESULTS irá agora aparecer o período a que a cotação diz respeito. O número de casos a obter costuma ser muito menor do que na folha anterior.

A macro A conserva a sua estrutura. Apenas se acrescentam três novas instruções para calcular o registo TAU a partir do número total de casos desejado e para inicializar as duas primeiras células da matriz RESULTS. Pode ainda acrescentar-se, no fim, uma instrução para visualizar as cotações que se obtiveram. Eis uma possível listagem:

```

{let STARTTIME,@now}{blank STOPTIME}{blank ELAPSED}
{blank RESULTS}{let TAU,1/(2*TOT_NUM)}
{put RESULTS,0,0,IN_PRICE}{put RESULTS,1,0,0}
{windowsoff}{paneloff}
{for COUNTER,1,TOT_NUM,1,\B}
{let STOPTIME,@now}{let ELAPSED,STOPTIME-STARTTIME}{graph}{quit}~

```

A macro B é a mesma. A macro C, encarregada na folha anterior apenas de colocar os valores no seu lugar em RESULTS, tem agora também o cálculo das cotações a partir de  $Z$ , de acordo com o visto acima (25). Recordar que cada cotação é calculada a partir da anterior. Eis a listagem de C:

```

{put RESULTS,0,2*COUNTER-1,@exp(MEAN*TAU+STDEV*@sqrt(TAU)*X(1))
                                *@index(RESULTS,0,2*COUNTER-2)}
{put RESULTS,0,2*COUNTER,@exp(MEAN*TAU+STDEV*@sqrt(TAU)*X(2))
                                *@index(RESULTS,0,2*COUNTER-1)}
{put RESULTS,1,2*COUNTER-1,2*COUNTER-1}
{put RESULTS,1,2*COUNTER,2*COUNTER}

```

Um possível aspecto final desta folha de cálculo é o dado pela figura 23 na página 73. A figura 24, na página 75 ilustra o resultado de seis simulações levadas a cabo com esta folha de cálculo.

**84. Discussão dos resultados:** Ao observarem-se os resultados das simulações que este modelo permite, é fácil compreender que as cotações são determinada por factores económicos variados que influenciam o mercado, não por padrões de comportamento. Ao observarem-se os padrões da figura 24, percebe-se que afinal as aparentes regularidades detectáveis nas cotações são compatíveis com a sua aleatoriedade Lognormal.

É uma convicção muito espalhada em teoria financeira que os mercados de capitais incorporam eficientemente a informação disponível sobre os activos neles cotados. Existem várias versões desta teoria. Uma delas, conhecida como a *hipótese da eficiência fraca* afirma que pelo menos toda a informação acerca das cotações passadas é incorporada pelos investidores na cotação actual de um título. Isto significa que não faz sentido tentar procurar padrões ou outra forma de previsão, uma vez que as cotações futuras se baseiam apenas nas cotações passadas. Para uma discussão pouco detalhada ver Brealey & Myers (1981) [31]. Um estudo mais técnico desta matéria pode encontrar-se em Copeland & Weston (1983) [14]. As

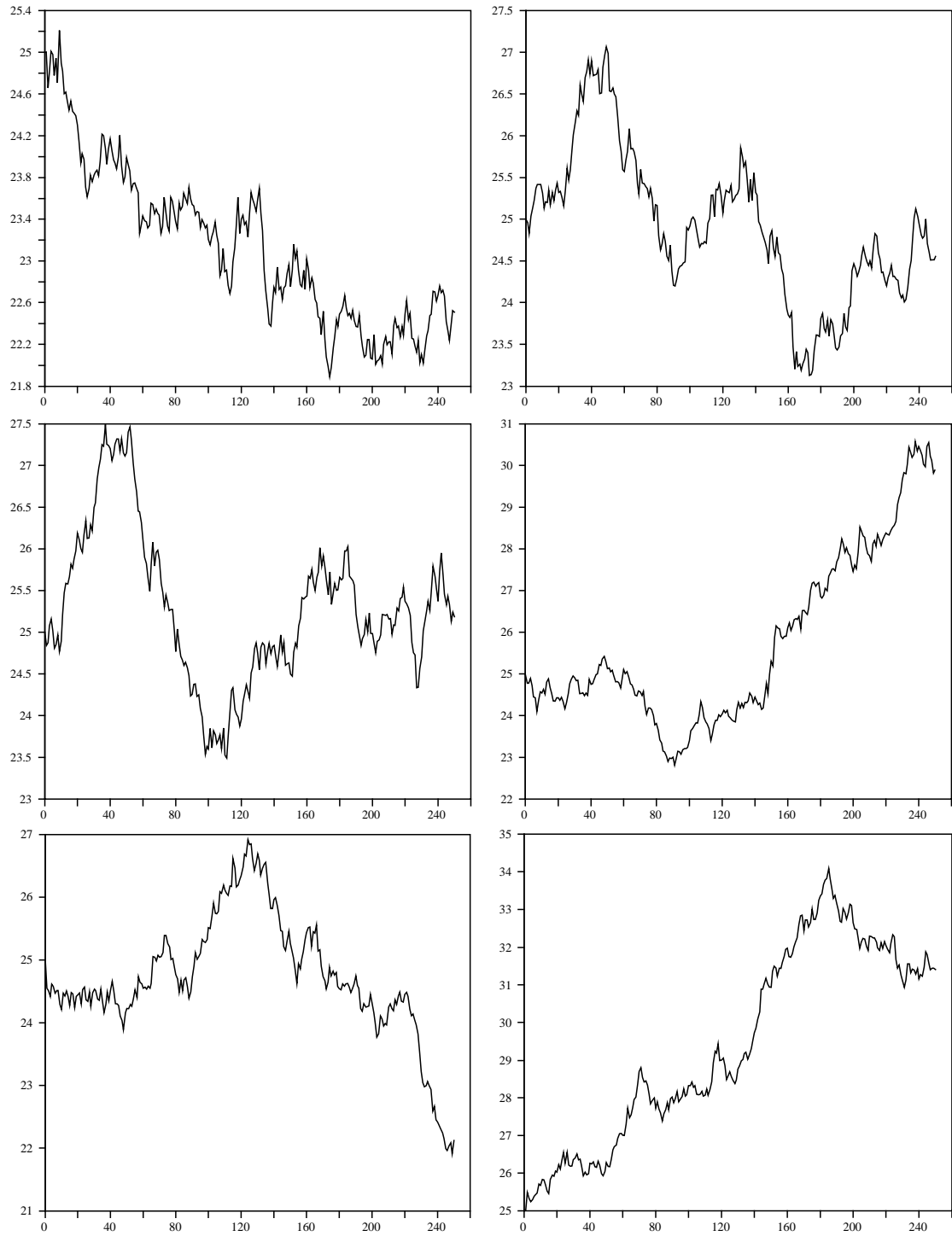


Figura 24: O aspecto gráfico de seis séries de cotações diárias simuladas. Podem reconhecer-se alguns dos padrões típicos: Um mercado otimista (Touro) ou deprimido (Urso), um pânico, uma “cabeça e ombros”, etc.

simulações que a folha de cálculo descrita acima tornam possíveis mostram que padrões aparentemente previsíveis podem ser puramente aleatórios.

## 5.7 Exercícios

85. Criar uma folha de cálculo para avaliar  $N(x)$  mas usando DATA TABLE 1.
86. Melhorar o modelo estudado na secção 5.2 de modo a calcular a distribuição normal para qualquer valor de  $\mu \neq 0$  e  $\sigma \neq 1$ . Ganhar familiaridade com o aspecto gráfico da função densidade de probabilidade de vários processos Gaussianos com diferentes  $\mu$  e  $\sigma$ .
87. Que acontece à densidade Lognormal quando  $\sigma$  aumenta?
88. Calcular a log-média e desvio padrão *anual* a partir de cotações diárias.
89. Correr várias simulações de cotações até identificar cada um dos seguintes padrões (os termos são os do Chicago Board of Trade 1985, *Comodity Trading Manual*): Area de suporte; area de resistência; tendência a subir; tendência a descer; cabeça e ombros; cabeça e ombros invertida; duplo top; duplo bottom; triangulo (ascendente, simétrico, descendente); top redondo; bottom redondo; bandeira; crash.

## Capítulo 6

# O Valor das Opções

O estudo deste capítulo não dispensa uma certa familiarização prévia com opções financeiras. Quem desejar obtê-la pode recorrer a textos como Jarrow & Rudd (1983) [19]. Também recomendáveis são os artigos de Black (1985) [8] e de Black & Scholes (1972) [9] e (1973) [10] entre outros.

90 Uma *opção sobre um activo* é o direito de comprar ou vender uma porção desse activo antes ou até uma data determinada, por um preço pré-estabelecido. As opções são, elas próprias, activos cujo valor está subordinado ao valor de outros activos. Existem muitos tipos de activos cujo valor está subordinado ao de outros activos; aquilo que distingue uma opção é ser um direito sem a contrapartida do respectivo dever.

A noção de opção é básica em Finanças. Tão básica como a fórmula para a actualização de *cash-flows*. De facto, a receita habitual que se usa para calcular o valor actual de um activo não é geral. Por exemplo, o cálculo do preço de uma opção mostra a forma correcta de achar o valor actual de um activo que consista no direito a atrazar uma decisão de compra ou venda.

91 Segue-se um glossário de termos e notação usados neste campo.

**Call:** Uma opção que dá ao seu detentor o direito de comprar uma porção de um activo.

**Put:** Uma opção que dá ao seu detentor o direito de vender uma porção de um activo.

**Preço no Exercício,  $K$ :** O preço ao qual o detentor de uma opção fica com direito a comprar ou vender cada porção de um activo.

**Data de Expiração,  $T$ :** A data à qual (ou antes da qual) o detentor de uma opção pode

exercer o seu direito de compra ou venda.

**Cotação do Activo,  $S_t$ :** O preço ao qual o activo em questão está a ser vendido na data  $t$ , i.e., aquando da compra da opção.

**Preço da Opção:** O preço ao qual a opção é transaccionada.

Usar-se-á a notação  $C_t$  para denotar o preço de uma Call na data  $t$ .  $P_t$  será o preço de uma Put. Quando se tornar conveniente uma notação mais específica usar-se-á  $C_t(S_t, K, T)$  para denotar o preço de uma Call à data  $t$ , com cotação actual do activo de  $S_t$ , um preço no exercício de  $K$ , e uma data de expiração  $T$ . O tempo até ao exercício é  $\tau = T - t$ . Uma porção de um activo chama-se “activo”. A menor porção de um activo que pode ser transaccionada é uma “acção” ou *share*.

**92. Funcionamento de um mercado de opções:** Nos mercados de opções, a porção do activo que constitui a unidade mínima transaccionável é fixa. Além disso, a data de expiração é a mesma para todas as transações: Tipicamente, na terceira sexta-feira do mês.

Existem dois tipos de opções: As *americanas*, que podem ser exercidas em qualquer altura até à data de expiração, e as *européias*, que só podem ser exercidas na data de expiração. Esta designação não tem nada a ver com o continente onde se situa o mercado: Opções europeias são frequentemente transaccionadas em Chicago, embora, em geral, as opções americanas sejam as mais populares tanto neste como no outro lado do oceano.

**93. Comprar vs. “escrever” opções:** O comprador de uma Call adquire o direito de comprar uma porção do activo a um preço combinado com antecedência e paga por esse direito na altura de o comprar. Diz-se, daquele que vende tal direito, que *escreve* uma Call. O que escreve, recebe hoje,  $t$ , o preço da opção, e fica obrigado a vender uma porção do activo no futuro,  $T$ , a um preço pre-determinado, caso o detentor da Call assim o exigir. Em termos de cash-flows, quem compra uma opção tem sempre um outflow inicial (o preço da opção), e um inflow futuro que será, na pior das hipóteses, nulo (isto dá-se quando não vale a pena exercer a opção). Quanto a quem escreve, a sua posição inicial é um inflow ao qual se segue um outflow — o qual, na melhor das hipóteses será nulo. Estas duas posições são simétricas.

**94. Um exemplo:** Uma “IBM September 50 call option” é um bem que dá ao seu detentor o direito de comprar uma porção fixa da empresa IBM até à terceira sexta-feira

de Setembro, ao preço de 50 dólares. Se o preço, hoje, de esse direito fôr 4 dólares, pode conseguir-se por 4 dólares o direito de comprar, entre hoje e a terceira sexta-feira de Setembro, uma dada porção da IBM a 50 dólares cada acção, por mais alta que seja a sua cotação.

Em geral, não é boa ideia exercer uma Call antes da data de expiração. Um dos teoremas interessantes na teoria da precagem de opções afirma que um exercício prematuro só é óptimo quando o activo paga dividendos antes da data de expiração. Uma consequência é que as Call americanas e europeias vêm dar quase ao mesmo e podem ser analisadas como se todas fossem europeias.

Uma “IBM September 50 put option” é um bem que dá ao seu detentor o direito de vender uma porção fixa da empresa IBM até à terceira sexta-feira de Setembro, ao preço de 50 dólares. Se o preço, hoje, de esse direito fôr 2 dólares, pode conseguir-se por 2 dólares o direito de vender, entre hoje e a terceira sexta-feira de Setembro, uma dada porção da IBM a 50 dólares cada acção, por mais baixa que seja a sua cotação. Ao contrário das Call, pode ser vantajoso exercer uma Put antes da data de expiração, mesmo na ausência de dividendos.

## 6.1 Padrões de Lucro à Data de Expiração

Uma das qualidades atractivas das opções é a de permitirem aos seus detentores a possibilidade de modificarem os padrões de lucro associados aos respectivos activos. Vão-se agora estudar alguns destes padrões, começando pelos três mais simples.

**96. Compra de activo:** Suponha-se que se compra uma porção de IBM’s em Julho, ao preço de 50 dólares cada acção. Se, em Setembro, a cotação deste activo é 70, ter-se-á feito um lucro de 20. Se é 40, ter-se-á perdido 10. Sendo  $S_T$  a cotação do activo em Setembro e  $S_0$  a sua cotação em Julho, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será:

$$\text{Lucro, activo} = S_T - S_0$$

Portanto, o padrão de lucro resultante da posse de activo é, quando expresso em função de  $S_0$ , uma simples réplica de  $S_0$ , deslocada de  $S_T$ . A figura 25 compara este padrão com outros que se estudam a seguir.

**97. Compra de Call:** Por outro lado, se em Julho se tiver comprado uma IBM September 50 call por 4 dólares, isto torna possível exercê-la caso a cotação das IBM seja, em

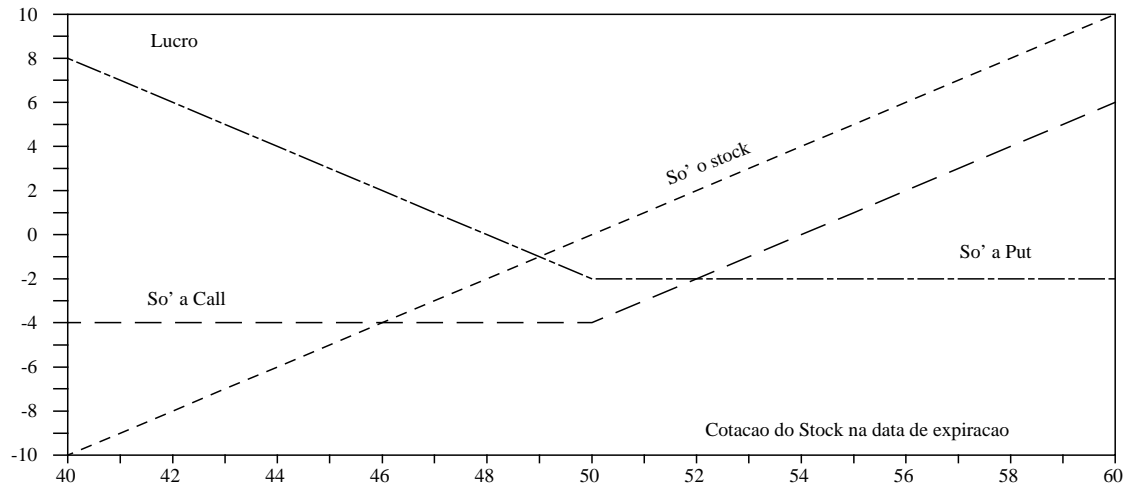


Figura 25: Os três mais simples padrões de lucro em função de diversos possíveis valores futuros de um activo: Compra de activo, compra de Call, compra de Put.

Setembro, superior a 50 dólares. Sendo  $C_0$  o preço desta Call, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será agora:

$$\text{Lucro, Call} = \max(0, S_T - K) - C_0 = \max(0, S_T - 50) - 4 = \begin{cases} -4 & \text{se } S_T \leq 50 \\ S_T - 54 & \text{se } S_T > 50 \end{cases}$$

Note-se que o uso da palavra *lucro* neste contexto é inadequado uma vez que se ignoram os juros associados com a compra do activo. No caso presente isto é tanto tradicional como inofensivo. A figura 25 compara este padrão com outros também muito simples.

**98. Compra de Put:** Se em Julho se tiver comprado uma IBM September 50 put por 2 dólares, caso a cotação das IBM seja, em Setembro, inferior a 50 dólares, seria interessante exercê-la. Sendo  $P_0$  o preço desta Put, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será:

$$\text{Lucro, Put} = \max(0, K - S_T) - P_0 = \max(0, 50 - S_T) - 2 = \begin{cases} 48 - S_T & \text{se } S_T \leq 50 \\ -2 & \text{se } S_T > 50 \end{cases}$$

O aspecto gráfico dos três padrões básicos descritos até aqui podem observar-se na figura 25.

**99. Compra de activo e Put sobre esse activo:** Suponha-se agora que se comprava activo da IBM por 50 dólares e ao mesmo tempo uma Put sobre esse activo, com um preço no exercício de também 50 dólares. Esta combinação de activos é conhecida pelo nome de



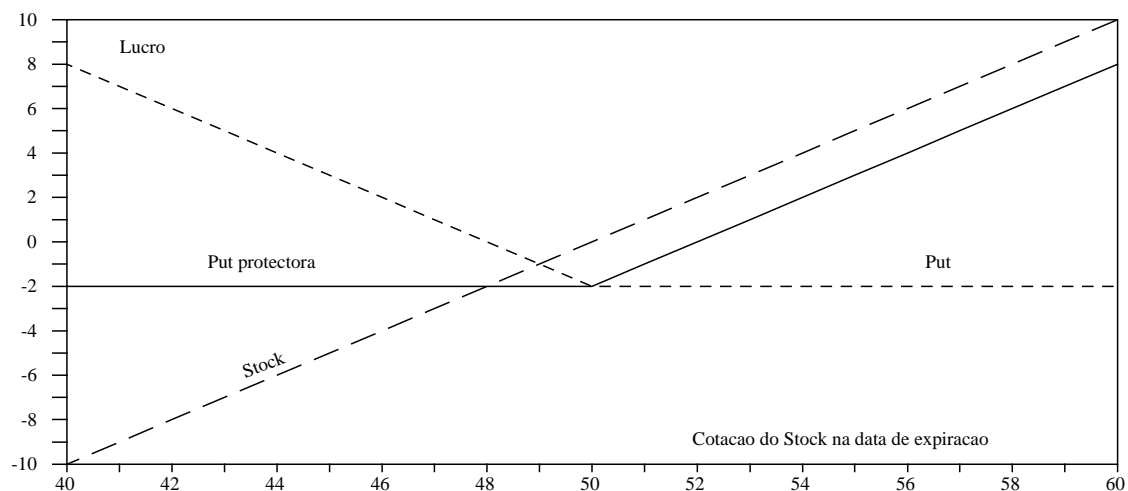


Figura 26: Padrão de lucro de uma Call protectora em função de diversos possíveis valores futuros de um activo.

*Put protectora* ou *seguro* de uma carteira. Sendo de 2 dólares o preço desta Put, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será:

$$\text{Lucro, activo} + \text{Put} = S_T - 50 + \max(50 - S_T, 0) - 2 = \begin{cases} -2 & \text{se } S_T \leq 50 \\ S_T - 50 - 2 & \text{se } S_T > 50 \end{cases}$$

Portanto, esta combinação de activo com Put oferece uma protecção contra descidas na cotação do activo, limitando as perdas máximas ao preço da Put. Graficamente, ter-se-ia o padrão de lucros que a figura 26 ilustra. O lucro com a Put protectora é a soma dos lucros com o activo e a Put.

**100. Spreads: Compra e escrita simultânea de Calls:** Outra possível combinação de activos consiste em comprar e, ao mesmo tempo, escrever Calls com diferentes preços de exercício. Quando a Call que é comprada tem um preço de exercício inferior à Call escrita, a combinação assim conseguida chama-se uma *bullish spread*. Por exemplo, suponha-se que se compra uma Call por 4 dólares com um preço no exercício de 50. Ao mesmo tempo, escreveu-se uma Call por 2 dólares com o preço no exercício de 55. Este bullish spread dará um lucro de

$$\text{Lucro, Bullish spread} = \max(S_T - 50, 0) - 4 + 2 - \max(S_T - 55, 0)$$

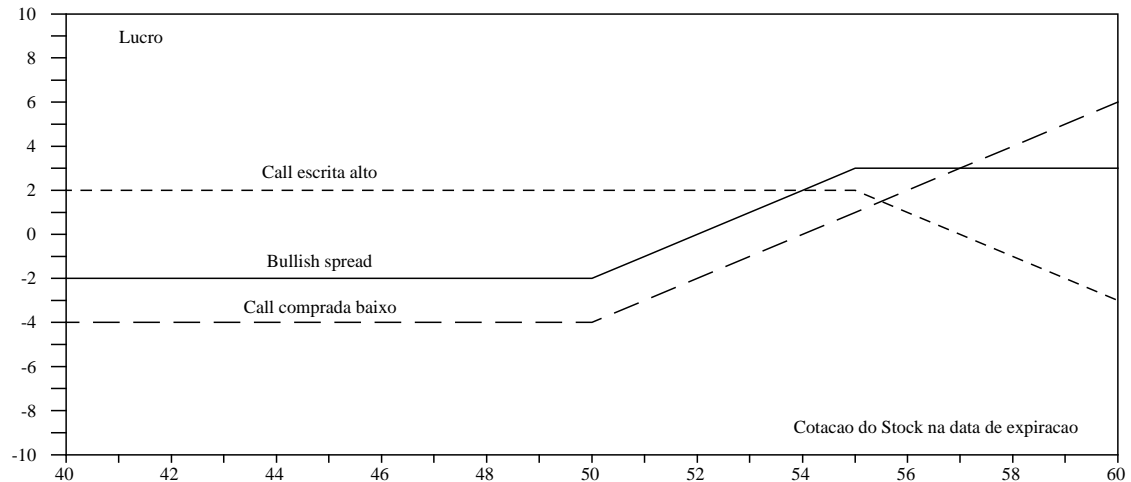


Figura 27: Padrão de lucro do bullish spread em função de diversos possíveis valores futuros de um activo.

o que vem a ser:

$$\text{Lucro, Bullish spread} = \begin{cases} -2 & \text{se } S_T \leq 50 \\ S_T - 50 - 2 & \text{se } 50 < S_T < 55 \\ 3 & \text{se } S_T \geq 55 \end{cases}$$

Graficamente, ter-se-ia o padrão de lucros que a figura 27 mostra. O lucro é a soma dos dois padrões obtidos com o comprar e o escrever Calls. Quando a tendência do mercado é para subir, o bullish spread oferece perspectivas de lucros.

Muitos outros exemplos de combinações seriam possíveis. Falar-se-á de alguns deles na secção dos exercícios.

## 6.2 Os Factores que Influenciam o Preço das Opções

Quanto deveria ser pago hoje pelo direito de comprar activo no futuro por um preço fixo? O preço de uma Call vem determinado por diversos factores e existe até uma resposta analítica para tal questão. De momento interessa explorar o aspecto empírico e ganhar sensibilidade para a forma como diversos possíveis factores influenciam tal preço.

101 Os factores que influenciam o preço a pagar por uma Call com preço  $K$  no exercício e data de expiração  $T$ , escrita sobre um activo cuja cotação hoje é  $S_t$ , seriam:

- O preço no exercício da opção,  $K$ . Obviamente, quanto mais elevado é o preço no

exercício, se tudo o resto permanecer constante, menos provável é que a Call venha a ser exercida. Por isso, quanto maior  $K$ , menor o preço da Call.

- A cotação actual do activo,  $S_t$ . Quando tudo o resto permanece constante, quanto maior for a corrente cotação do activo sobre o qual a Call é escrita, tanto mais vale esta opção de comprar tal activo. Isto, porque a probabilidade de a cotação ser suficientemente elevada para valer a pena exercer a opção aumenta com essa cotação.
- O tempo que resta até ao exercício,  $\tau = T - t$ . Quanto mais tempo se tem para exercer uma opção, mais provável se torna o seu exercício.
- A volatilidade do activo. Tudo o mais sendo igual, um activo muito volátil aumenta a probabilidade de que em algum momento valha a pena exercer a opção de comprá-lo. Em geral, a volatilidade dos activos diminui o seu preço. Com as Call passa-se o contrário. Uma Call protege o seu detentor contra os movimentos descendentes das cotações. Por isso, um detentor de uma Call só estará interessado nos movimentos ascendentes da cotação.

Diz-se que uma opção está “junto ao dinheiro” ou *at the money* quando a cotação do respectivo activo se encontra próxima do preço no exercício  $K$ . Diz-se que uma opção está “no dinheiro” ou *in the money* quando a cotação do respectivo activo parece prometedora em termos de ela vir a ser exercida. Assim, no caso de uma Call, quando a cotação do activo é mais elevada do que  $K$ , essa Call está *in the money*. Diz-se que uma opção está “fora do dinheiro” ou *out of the money* quando a cotação do respectivo activo não é prometedora em termos de ela vir a ser exercida.

102 O valor *intrínseco* de uma opção é a diferença  $S_t - K$  entre a cotação presente do activo,  $S_t$ , e o preço no exercício  $K$ . Se uma opção dá ao seu detentor o direito de comprar uma IBM a 65 dólares e hoje as IBM estão a 70 dólares, o valor intrínseco desta opção é cinco dólares. Naturalmente, só opções que estejam *in the money* têm valor intrínseco. Quando a opção fica *out of the money* o seu valor intrínseco torna-se negativo. Mas isto não significa que uma opção que se encontre *out of the money* não tenha valor. O valor intrínseco é apenas uma das fontes de valor de uma opção. Para além dele, deve considerar-se o valor do tempo que resta até à expiração, o qual pode fazer com que a cotação do activo se torne favorável. O valor do tempo compõe-se, por sua vez, de duas parcelas:

**Valor Temporal do Dinheiro:** quanto mais tarde uma Call é exercida, mais tempo é

possível deixar o dinheiro destinado à compra do activo a render. O valor temporal de um atraso de  $\tau$  no dispêndio de  $K$  é  $K - Ke^{-r\tau} = K(1 - e^{-r\tau})$ .

**Valor próprio da Opção:** o valor do direito a não comprar ou não vender activo pelo preço previamente combinado,  $K$ , caso a sua cotação na data do exercício não se mostre convidativa.

Estas três parcelas podem escrever-se

$$C_t = (S_t - K) + K(1 - e^{-r\tau}) + P_t \quad (26)$$

ou, simplificando,

$$C_t = S_t - Ke^{-r\tau} + P_t \quad (27)$$

onde  $P_t$  é o valor próprio da opção, também conhecido por *option feature*. À medida que se aproxima a data de expiração, o valor de uma opção que está *in the money* torna-se cada vez mais semelhante ao seu valor intrínseco  $S_t - K$  pois o valor  $P_t$  próprio da opção e o valor temporal do dinheiro esvaem-se. Caso a opção esteja *out of the money*, o aproximar-se da data de expiração torna o valor da opção cada vez mais semelhante ao valor intrínseco subtraído do direito de não comprar activo — a *feature*.

103 Note-se que existem activos subordinados cujo valor se compõe apenas do valor intrínseco mais o valor temporal do dinheiro (os contratos *forward*, por exemplo). Aquilo que é específico das opções é o seu valor próprio (*feature*).

### 6.3 A Equação de Black-Scholes: O Preço de uma Opção

Baseados na impossibilidade de obter lucros a partir de uma carteira perfeitamente protegida contra variações na cotação de um activo, Black & Scholes (1973) [10] derivaram uma fórmula que pode ser usada para calcular o preço das Call europeias. Tal modelo assume que o activo sobre o qual a opção é escrita não paga dividendos e a volatilidade das cotações é multiplicativa, i.e., lognormal. Usar-se-á  $\sigma$  para designar a dispersão logarítmica do activo sobre o qual se escreve a opção. O valor esperado logarítmico do activo,  $\mu$ , não tem qualquer papel na precagem das opções.

Usar-se-á a mesma notação que até aqui. O tempo até à expiração,  $T - t$ , chamar-se-á  $\tau$ . O ganho obtido com um activo livre de risco será  $r$ . Note-se que ambos  $r$  e  $\tau$  devem estar expressos nas mesmas unidades de tempo, por exemplo, anos.

Black & Scholes mostraram que, dados certos pressupostos, o valor de uma Call teria que vir dado por

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \quad (28)$$

onde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \quad \text{e onde} \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$$

e que, quando tal não acontece, é possível construir carteiras sem risco mas com ganho esperado positivo. Como em outras ocasiões,  $N()$  denota a distribuição Normal acumulada. No capítulo 3 foi apresentada uma forma de calcular esta função.

É fácil de ver que a fórmula de Black-Scholes obedece aos requisitos enunciados acima quanto ao preço das opções. Nomeadamente,

- quando a volatilidade  $\sigma$  é nula, o preço de uma opção apenas expressa a diferença entre a cotação presente do activo e o valor actual do preço no exercício: os  $N(d)$  igualam a unidade e portanto

$$C_t = S_t - K e^{-r\tau}$$

- à medida que se aproxima a data de expiração, o valor da opção vai-se aproximando do seu valor intrínseco.

O valor  $N(d_1)$  é chamado “Delta” ( $\Delta$ ) e mede a sensibilidade do preço de uma opção a variações na cotação do activo. Qualquer investidor que tenha em seu poder uma proporção igual a  $-\Delta$  de activo por cada opção que comprar sobre esse activo, deixará de estar exposto ao risco associado à volatilidade do activo. No fim de contas, o que a fórmula de Black & Scholes diz é que tal investidor deverá pagar pela compra dessas opções um montante tal que torne nulo o ganho obtido com essa posição, uma vez que ela está protegida contra o risco (diz-se de uma posição protegida contra o risco que está *hedged*).

**105. Como usar a fórmula de Black & Scholes: Um exemplo.** Considere-se uma Call com um preço no exercício de  $K = 50$  escrita sobre um activo com  $S_t = 50$ . Suponha-se que o cotação desse activo é um processo lognormal com  $\sigma = 0,35$ . Se  $r = 0,08$  e se  $\tau = 0,25$  (portanto, aproximadamente três meses) ter-se-á:

$$d_1 = 0,20178$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= 0,02678 \\
N(d_1) &= 0,5800 \\
N(d_2) &= 0,5107 \\
\exp(-r\tau) &= 0,9802
\end{aligned}$$

O que daria, segundo (28) um preço de

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) = 3,9693$$

para esta Call. Os números acima podem ser usados para testar a implementação da fórmula (29) em 123 ou outro ambiente.

## 6.4 A Paridade Call-Put

A fórmula de Black & Scholes pode ainda ser usada para achar o preço de Puts europeias. Isso deve-se à existência do *teorema da paridade Call-Put*, que mostra que uma Put europeia sobre um dado activo, com preço no exercício de  $K$  e data de expiração de  $T$ , é equivalente a uma carteira na qual se combinam três outros activos. Para verificar que isto é assim, construa-se a seguinte carteira:

1. Comprar uma Call sobre um activo, com um preço no exercício de  $K$  e data de expiração de  $T$ . Este activo terá hoje um cash-flow de  $-C_t$  e um cash-flow de  $+\max(S_t - K, 0)$  no exercício  $T$ .
2. Comprar hoje uma porção igual a  $Ke^{-r\tau}$  do activo sem risco. Este terá um cash-flow inicial  $-Ke^{-r\tau}$  e um cash-flow de  $+K$  na data de expiração  $T$ .
3. Vender *curto* uma porção do activo sobre o qual a Call acima foi escrita. Esta venda origina um cash-flow de  $+S_t$  à data  $t$  (hoje) e um outro de  $-S_T$  à data de expiração da Call.
4. Escrever uma Put europeia sobre esse activo, com a mesma data de expiração e preço no exercício que a Call. Esta venda origina um cash-flow de  $+P_t$  à data  $t$  (hoje) e um outro de  $-\max(K - S_T, 0)$  à data de expiração  $T$ .

O cash-flow total gerado por esta carteira à data da expiração acaba por ser zero como é fácil de ver. De facto,

Cash-flows quando $S_T \leq K$	
Compra de Call	0
Activo sem risco	$K$
activo curto	$-S_T$
Escrita de Put	$-(K - S_T)$

Cash-flows quando $S_T \geq K$	
Compra de Call	$S_T - K$
Activo sem risco	$K$
activo curto	$-S_T$
Escrita de Put	0

Segue-se que o cash-flow total desta carteira à data  $t$  (hoje) tem que ser zero também. Se assim não fosse ela seria uma máquina de criar ou volatilizar dinheiro, o que só acontece nas casas moedeiras. Portanto, terá que verificar-se:

$$-C_t - Ke^{-r\tau} + S_t + P_t = 0 \quad \text{ou, por rearranjo, } P_t = C_t - S_t + Ke^{-r\tau}.$$

É este o teorema da paridade Call-Put, cuja importância prática é enorme. Ele pode ser usado para tirar partido de oportunidades de arbitragem que surjem quando as opções estão a ser vendidas abaixo ou acima do seu valor teórico. Confrontando este teorema com a fórmula (27) vê-se a razão pela qual chamamos  $P_t$  à *option feature*. De facto, o direito a não comprar, no exercício, activo mais barato que a sua cotação, é igual ao direito de vende-lo.

106      Pode usar-se este teorema directamente com a equação de Black-Scholes para se obter a fórmula equivalente no caso das Puts:

$$P_t = -S_t N(-d_1) + Ke^{-r\tau} N(-d_2) \quad (29)$$

onde  $d_1$  e  $d_2$  são o mesmo que no caso das Call (28) e  $N()$  é a distribuição Normal acumulada. Derivando em ordem a  $S_t$  vê-se que, no caso das Put, o *hedge ratio* ou  $\Delta$  vale  $N(d_1) - 1$ .

## 6.5 A Estimação da Volatilidade Implícita Num Preço

De todas as variáveis requeridas pela equação de Black-Scholes para a determinação do preço de opções, a mais difícil de determinar é  $\sigma$ , o desvio-padrão do ganho logarítmico do activo. É costume tentar-se descobrir, dado o preço real de uma Call, qual é o  $\sigma$  que esse preço supõe existir no activo sobre o qual a Call foi escrita.

Não existe uma solução analítica para tal problema. A forma prática de estimar  $\sigma$  consiste em usar a equação de Black-Scholes iterativamente até à descoberta de uma solução. Existem várias maneiras de iterar. Aqui, usar-se-á uma delas, a de Newton-Raphson. Como exemplo desta técnica, o desenvolvimento seguinte é paradigmático.

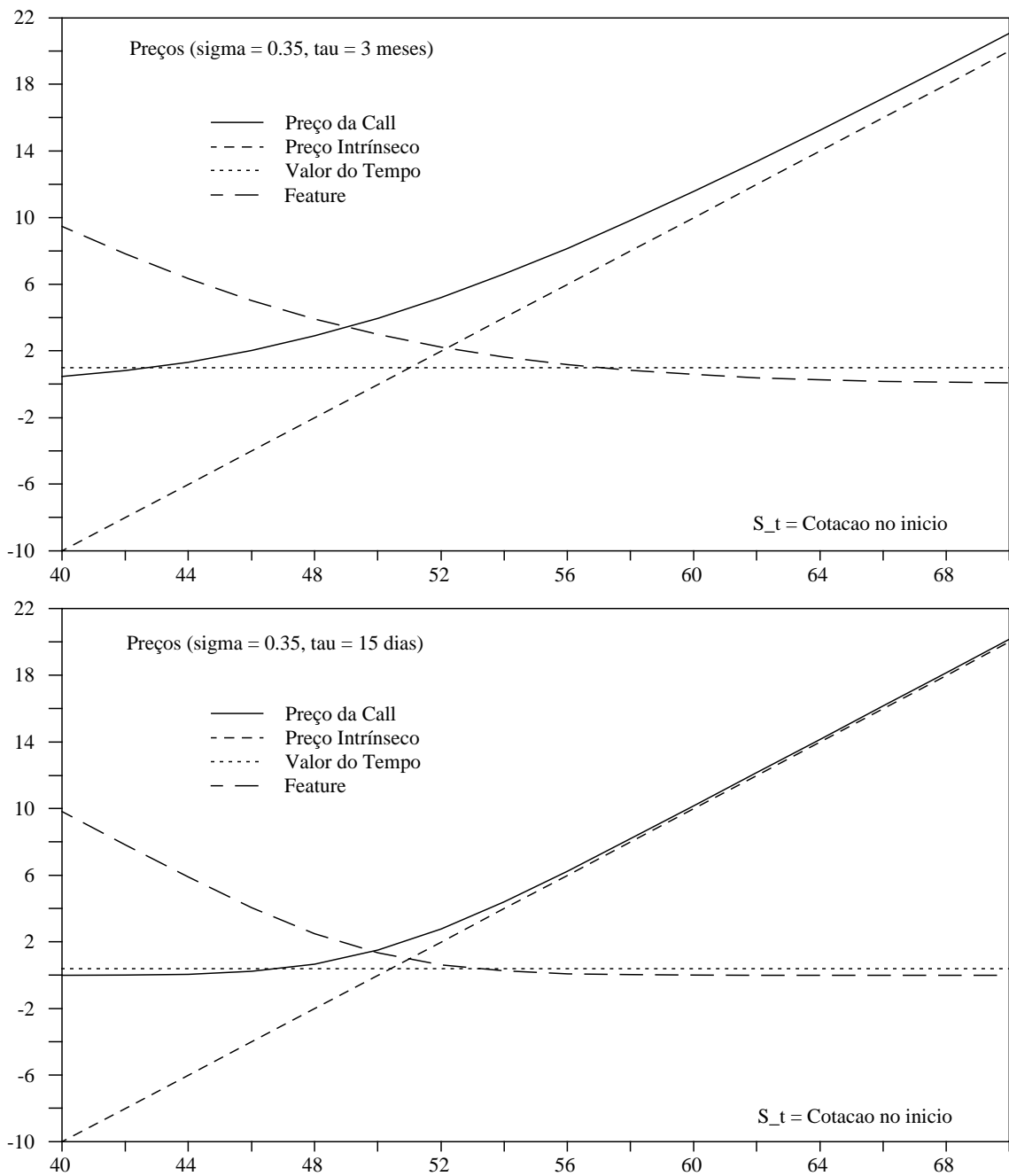


Figura 28: Padrão de lucro de uma Call (linha a cheio) e de cada um dos elementos de que se compõe o seu preço: o valor intrínseco, o valor temporal do dinheiro e a *option feature*.



C	Preço da Call	N'(D 1)	Derivada de $N(d_1)$
DERIV	Derivada $f'(\sigma)$	N(D 1)	Probabil. Acumulada
D 1	$d_1$	N(D 2)	Probabil. Acumulada
D 2	$d_2$	R	$r$ , o ganho sem risco
EXP	$\exp(-r\tau)$	S	$S_t$ , a cotação do activo em $t$
INIT	$\sigma$ inicial	SIGMA	$\sigma$ , a estimação pretendida
K	Preço no exercício	TARGET	Registo auxiliar
MARK	Marca ou <i>flag</i>	TAU	$\tau$ , o tempo até ao exercício

Tabela 3: Lista dos nomes de registos a definir na folha de cálculo capaz de estimar o  $\sigma$  subjacente a um dado preço,  $C$  de uma Call.

O problema consiste em, dados os  $S_t, r, \tau, K$  e  $C$ , o preço da Call, achar um  $\sigma$  tal que

$$f(\sigma) = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) = C$$

A solução obtém-se procurando iterativamente uma raiz da equação  $C - f(\sigma) = 0$ . A monotonicidade de  $f$  garante que existe apenas uma tal raiz. As iterações de Newton-Raphson substituem sucessivamente  $\sigma$  em

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{f(\sigma_i) - C}{f'(\sigma_i)} \quad (30)$$

onde  $i + 1$  indica a iteração seguinte. É importante começar a iterar com um  $\sigma$  inicial que conduza sempre à convergência. Manaster & Koehler (1982) [24] mostraram que um desses  $\sigma$  é dado por

$$\sigma^2 = \left| \ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + r\tau \right| \frac{2}{\tau} \quad (31)$$

Falta ainda determinar a derivada

$$f'(\sigma) = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}$$

que não é de cálculo trivial. Pode porém ver-se (Jarrow & Rudd [19]) que

$$f'(\sigma) = S_t \sqrt{\tau} N'(d_1) \quad \text{e onde } N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (32)$$

De posse de todos os elementos necessários à estimação de  $\sigma$ , pode passar-se à implementação do algoritmo de Newton-Raphson em folha de cálculo.

K	125	d_1	-2.7E-17	mark	8
S	100	d_2	-0.62151	init	1.243039
exp	0.970445			deriv	9.973557
r	0.12			N'(d_1)	0.199471
tau	0.25			target	2
Probabilidades Acumuladas:					
d	-2.7E-17	-0.62151		C	-7.40423
N(d)	0.249999	0.267128		sigma	1.243039
s(d)	0.249999	0.267128			
h(d)	0.199471	0.328873			
t		1	0.874148		
p	0.231641				
b(0)	0.319381				
b(1)	-0.35656				
.	.	.			

Figura 29: Um aspecto possível para a folha de cálculo capaz de estimar o  $\sigma$  subjacente a  $C$ , um dado preço de uma Call. Do lado esquerdo, em baixo, vê-se o espaço reservado ao cálculo dos  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$ .

**107. Implementação:** Usar-se-á como ponto de partida a folha de cálculo onde se determinou  $N(x)$ , a função Probabilidade Gaussiana acumulada. Como é preciso achar o valor desta função para  $d_1$  e  $d_2$ , conservar-se-ão dois registos para este efeito.

Os nomes dos registos usados neste exemplo constam da tabela 3. O registo MARK inicia o processo de estimação do  $\sigma$  subjacente a um dado  $C$ . Quando este registo é diferente de zero, a folha de cálculo determina INIT, o valor de  $\sigma$  recomendável para iniciar as iterações. Isto consegue-se com a fórmula (31). Depois deste  $\sigma$  inicial ter sido descoberto, deve pôr-se manualmente o registo MARK a zero. A folha de cálculo produzirá então uma ou várias iterações partindo do  $\sigma$  inicial. As iterações devem prosseguir até que o registo C, onde se calcula o preço da Call pela fórmula de Black-Scholes, se tenha tornado igual ao registo TARGET (onde se deve colocar, no início, o preço da Call).

108 Um possível aspecto da folha de cálculo é o que se mostra na figura 29. Esta figura ilustra a situação em que se pretende achar o  $\sigma$  inicial (registo INIT) e portanto MARK é diferente de zero.

**109. As fórmulas:** Os registos K, S, R, e TAU contêm os dados do problema e permitem determinar o preço da Call segundo o modelo de Black-Scholes (28). Para isto, introduzir-se-ão as seguintes fórmulas ou semelhantes:

K	125	d_1	-0.85651	mark	0
S	100	d_2	-1.05825	init	1.243039
exp	0.970445			deriv	13.82214
r	0.12			N'(d_1)	0.276442
tau	0.25			target	2

Probabilidades Acumuladas:				C	2
d	-0.85651	-1.05825		sigma	0.403479
N(d)	0.195855	0.144968			
s(d)	0.195855	0.144968			
h(d)	0.276442	0.227889			
t	0.834441	0.803124			
. . .					

Figura 30: O aspecto final, depois de seis iterações, da folha de cálculo que estimou o  $\sigma$  subjacente a  $C$ , um dado preço de uma Call.

```

nos registos  d_1,  (@LN($/$K)+($R+SIGMA^2/2)*$TAU)/(SIGMA*@SQRT($TAU))
              d_2,  (@LN($/$K)+($R-SIGMA^2/2)*$TAU)/(SIGMA*@SQRT($TAU))
              exp,  @EXP(-$R*$TAU)
              C ,   +$S*$N(D_1)-$K*$EXP*$N(D_2)

```

110 A seguir, introduzem-se as fórmulas que permitem achar INIT, o  $\sigma$  inicial (31) e depois iterar até que os registos TARGET e C fiquem iguais. O registo DERIV contém a fórmula (32). SIGMA implementa INIT para valores de MARK que não sejam zero mas passa a implementar a fórmula (30) caso MARK seja posto a zero. Em 123, estas fórmulas podem ter o aspecto que se mostra a seguir, ou semelhante:

```

nos registos init ,  @SQRT(@ABS(@LN($/$K)+R*TAU)*2/TAU)
              deriv ,  +$S*@SQRT($TAU)*$N'(D_1)
              N'(d_1),  (1/@SQRT(2*@PI))*@EXP(-D_1^2/2)
              sigma ,  @IF($MARK<>0,$INIT,$SIGMA-($C-$TARGET)/$DERIV)

```

111 Depois destas fórmulas introduzidas e da inicialização de MARK e de TARGET, o aspecto da folha de cálculo, no fim de seis iterações, deve ser o que a figura 30 mostra. Conclui-se portanto que a dispersão suposta pelos investidores para o activo sobre o qual a Call foi escrita é  $\sigma = 0.4035$  uma vez que foi atribuída a esta opção um preço de 2 dólares. Fica assim resolvido o problema proposto.

## 6.6 Exercícios

**112.** Considerem-se as “General Pills, September 60 Call options”. Supondo que uma acção deste activo está neste momento cotado a 55 dólares e que estas Calls se estão a vender a 8 dólares,

1. Fazer um gráfico com o *payoff* resultante da compra de uma destas Calls em função de várias cotações no exercício,  $S_T$ .
2. Fazer um gráfico com o *payoff* resultante da compra de uma acção do activo agora e posterior venda em Setembro, em função de  $S_T$ .
3. Qual é o *payoff* resultante da compra de uma acção do activo agora, junto com a escrita (venda) de uma Call sobre essa porção?
4. Num gráfico simples, comparar os *payoff* resultantes da compra de uma acção de General Pills, com os da compra de uma porção de General Pills junto com a escrita de uma Call sobre essa acção, com os do mesmo mas com a escrita de duas Calls em vez de uma, e com os do mesmo com três Calls.

Notar que quem escreve uma Call arrecada o dinheiro da venda hoje, mas tem que fornecer o activo ao comprador da Call no exercício, caso esse comprador queira exercer a sua opção.

**113.** Uma *bearish spread* consiste em comprar uma Call com um preço no exercício que seja elevado e ao mesmo tempo escrever outra com um que seja baixo. Fazer um gráfico do padrão de lucros desta combinação em função de  $S_T$ .

**114.** Um investidor compra duas Calls, cada uma com o mesmo preço no exercício de 50 dólares, e depois vende uma com um preço no exercício de 40 e a outra com um de 60. Fazer um gráfico do padrão de lucros desta combinação, conhecida como *butterfly spread* em função de  $S_T$ .

**115.** Numa *straddle* um investidor compra tanto uma Put como uma Call sobre o mesmo activo, com a mesma data de expiração e preço no exercício. Fazer um gráfico do padrão de lucros das três straddles possíveis com os dados abaixo, em função de  $S_T$ .

Tipo	$K$	$C_t$ ou $P_t$
Call	40	13
Call	50	6
Call	60	3
Put	40	1
Put	50	4
Put	60	10

**116.** Construir uma folha de cálculo que calcule o valor de uma Call e de uma Put e onde se possa trabalhar com datas, mas onde os cálculos sejam feitos em termos de dias do calendário anual. Assumir que o ano tem 365 dias. Calcular o valor de uma Call escrita sobre uma acção de activo actualmente cotado em 50 dólares. O exercício é 40 dólares, o bem sem risco paga 6% e o desvio-padrão do ganho logarítmico do activo é 20%. A data de expiração é a 23 de Março de 1987 e hoje estamos a 18 de Outubro de 1986.

## Capítulo 7

# A Segurança Dinâmica das Carteiras

As opções podem usar-se para garantir lucros mínimos num investimento. Já se viu que, quando se compra activo e simultaneamente uma Put escrita sobre esse activo, fica-se com a certeza de que o ganho de tal investimento nunca desce abaixo do preço da Put no exercício. Por exemplo, esperam-se bons ganhos com a compra de uma porção de General Pills, cuja cotação actual é 56 dólares mas que deverá subir até ao fim do ano. Porém, há sempre o perigo de que a cotação desça. Para segurar o investimento contra tal eventualidade, compra-se ao mesmo tempo uma Put sobre todo o activo adquirido. Esta Put autoriza o investidor a vender o activo por 50 dólares no fim do ano. O custo da Put, 2.38 dólares, é extraído da fórmula de Black-Scholes (ver o capítulo 6) com  $\sigma = 0.3$  e  $r = 0.08$ . Esta *Put protectora* garante que o investidor não perde mais de 6 dólares por acção. Se a cotação das General Pills estiver, no fim do ano, acima dos 50, deixar-se-á a Put expirar sem a exercer. Se estiver abaixo, exercita-se a Put e arrecadam-se esses 50 dólares. É como se o investidor tivesse feito um seguro contra descidas com 6 dólares deduzíveis. Claro que a protecção não apareceu de graça. Em vez de investir 56, investiu-se 58.38 por acção. Podia ter-se posto este dinheiro a render e obter-se-ia um ganho de  $0.08 \times 2.38$  até ao fim do ano.

### 7.1 A Segurança de Carteiras de Activos Mais Complicados

Como obter protecção para carteiras de activos variados? Quando os activos que constam de uma carteira têm algures um mercado onde opções podem ser escritas sobre eles, podia

pensar-se em comprar, junto com a carteira, uma Put sobre essa carteira. Mas em muitos casos será impossível de achar uma Put que reproduza exactamente o cabaz de activos que se pretende segurar. Comprar uma opção por cada activo que constasse da carteira não seria uma boa solução pois uma carteira de opções custa mais caro do que uma opção sobre essa carteira. De facto, a volatilidade das carteiras é geralmente menor do que a soma das volatilidades dos seus componentes, devido à existência de correlações entre eles.

**117. Uma carteira segura equivale a duas posições:** É aqui que o modelo de Black-Scholes tem uma palavra a dizer. Uma opção sobre um activo — e aqui, “activo” é tanto uma carteira de diferentes activos como porções de uma só empresa — é simplesmente uma combinação de uma posição *curta* no activo, com outra *longa* no activo sem risco, sendo ambas estas posições ajustadas continuamente.

De facto, pode manipular-se o modelo de Black-Scholes de modo que o valor de uma Put se escreva

$$P_t = -S_t N(-h) + K e^{-r\tau} N(\sigma\sqrt{\tau} - h) \quad \text{com} \quad h = \frac{\log\left(\frac{S_t e^{r\tau}}{K}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2} \quad (33)$$

(ver 29). Note-se que este  $h$  coincide com o  $d_1$  usado no capítulo 6 e que  $\sigma\sqrt{\tau} - h$  é o mesmo que o  $-d_2$ . O tempo  $t$  varia entre zero e a unidade. Recorde-se ainda que  $\tau = 1 - t$ ,  $r$  é o ganho dos bens livres de risco,  $\sigma$  é o desvio-padrão do activo sobre o qual se escreve a Put e  $K$  é o preço no exercício da Put.

**118** A forma acima tem a vantagem de mostrar que comprar uma Put é equivalente a investir

$$K e^{-r\tau} N(\sigma\sqrt{\tau} - h)$$

na compra do activo sem risco — por exemplo, na compra de Obrigações do Tesouro que vençam em  $t = 1$  — e mais um investimento de

$$-S_t N(-h)$$

no activo (neste caso a inversão terá que consistir em vender curto uma porção  $S_t N(-h)$  do activo).

Isto quer dizer que comprar activo e mais uma Put sobre esse activo com preço no exercício de  $K$  é equivalente a comprar  $S_t[1 - N(-h)]$  do activo e mais  $K e^{-r\tau} N(\sigma\sqrt{\tau} - h)$  em obrigações do Tesouro.

119 O investimento total necessário para comprar o activo e mais a Put será  $S_t + P_t$ . Em termos de proporções presentes na carteira estar-se-á a investir

$$\omega = \frac{S_t[1 - N(-h)]}{S_t + P_t} \text{ no activo e } 1 - \omega = \frac{Ke^{-r\tau}N(\sigma\sqrt{\tau} - h)}{S_t + P_t} \quad (34)$$

no activo sem risco. Recorrendo à fórmula de Black-Scholes a proporção investida no activo pode escrever-se

$$\omega = \frac{S_t[1 - N(-h)]}{S_t[1 - N(-h)] + Ke^{-r\tau}N(\sigma\sqrt{\tau} - h)}$$

Chama-se *Hedge Ratio* a esta proporção e o seu papel é semelhante ao do *delta* ( $\delta$ ) de uma opção simples.

120 Em resumo: Se alguém pretender comprar um determinado cabaz de activos devidamente seguros contra descidas, de modo a garantir que à data  $t = 1$  o investimento total não valerá menos do que  $K$ , então é preciso que em cada momento  $t$  esse alguém invista uma proporção  $\omega$  da sua riqueza no cabaz que escolheu e uma proporção  $1 - \omega$  em bens livres de risco que vençam em  $t = 1$ .

**121. Um exemplo:** Suponha-se que alguém decidiu investir as suas riquezas na General Pills, que neste momento (início da semana zero) está cotada a 56 dólares. Para evitar o pior, esse alguém resolve também comprar Puts protectoras sobre o mesmo activo, com um preço no exercício de 50 dólares. Isto assegura que o valor da carteira no fim do ano nunca será inferior a 50 dólares por acção. Suponha-se porém que não há à venda Puts sobre a General Pills. Ter-se-ão que criar Puts equivalentes investindo no activo e em obrigações do Tesouro. O ganho livre de risco é 8% e a dispersão logarítmica,  $\sigma$ , do activo da General Pills é 30%. Sendo assim, este investidor deveria adoptar a estratégia seguinte:

Investir uma proporção

$$\omega_{52/52} = \frac{S_t[1 - N(-h)]}{S_t + P_t} = \frac{56(1 - 0.2135)}{58.38} = 75.44\%$$

em acções da General Pills; e investir

$$1 - \omega_{52/52} = 24.56\%$$

em Obrigações do Tesouro que vençam ao fim de um ano. Note-se que, se existissem Puts escritas sobre as General Pills, elas custariam 2.38 para um exercício de 50 dólares daqui a um ano. A estratégia deste investidor teria então consistido na compra de 17.13 acções da



General Pills ao custo total de 959.23 dólares e 17.13 Puts ao custo de 40.76 dólares, por cada mil dólares que investisse. Ao comprar 754.4 dólares em acções e 245.6 em obrigações, o investidor procede a uma réplica exacta do pacote de 17.13 acções e 17.13 Puts. Isto é garantido pela equação de Black-Scholes.

**122** Uma semana mais tarde (no início da semana 1),  $\tau$  (o tempo que resta para que passe um ano) será  $(52 - 1)/52 = 0.9808$  do ano. Já passou um tempo  $t = 1 - \tau = 0.0192$  e a cotação do activo subiu eventualmente para 60. O bem livre de risco,  $r$ , manteve-se em 8%. Nesse momento, o investidor em questão deveria estar a investir a proporção

$$\omega_{51/52} = \frac{S_t[1 - N(-h)]}{S_t + P_t} = \frac{60(1 - 0.1524)}{60 + 1.63} = 82.52\%$$

em acções da General Pills; e ao mesmo tempo a investir

$$1 - \omega_{51/52} = 17.48\%$$

em Obrigações do Tesouro que vençam ao fim de um ano menos uma semana.

Por cada mil dólares investidos, a estratégia descrita poderia expressar-se em termos das posições no início e no final de cada semana. Para o exemplo em estudo essa estratégia passaria a ter este aspecto:

				Início da semana 0/52			
				S_t	shares	bonds	carteira
				56	754.50	245.49	1000
Final da Semana 0/52				Início da semana 1/52			
omega	shares	bonds	carteira	S_t	shares	bonds	carteira
0.8252	808.39	245.87	1054.2	60	870.05	184.21	1054.2

**123** No final de uma dada semana calculam-se os  $\omega$  a adoptar na semana seguinte em função das novas cotações e do tempo que falta. No início da seguinte, investe-se a totalidade do valor da carteira segundo o que estes  $\omega$  ditarem. Para calcular o valor da carteira no final de uma semana deve ter-se presente que:

- O valor do activo no final da semana dependerá de como se apresente a sua cotação: Os 754.50 dólares que este activo valia no início da semana zero passam a 808.39 no final dessa semana.

- O valor das obrigações cresce à taxa semanal de  $e^{0.08/52} = 1.00154$ : Os 245.49 dólares iniciais passam a 245.87 no final da semana zero.

Portanto, no final da semana zero, a carteira irá valer, em vez dos mil dólares iniciais,  $808.39 + 245.87 = 1054.2$ . São estes 1054.2 dólares que se aplicam na totalidade, logo no início da semana 1, em activo da General Pills e em Obrigações do Tesouro segundo a nova proporção  $\omega_{51/52} = 82.52\%$ . Este  $\omega$  é o que agora se mostra capaz de simular, para os ganhos com o activo e obrigações observados no final da semana zero, uma carteira segura de acordo com a fórmula de Black-Sholes.

O processo iria continuar ao longo das semanas. Por exemplo, caso a cotação das General Pills caísse para 52 no final da semana 1, a posição do investidor nessa altura seria (por cada mil dólares),

	Final da Semana 1/52				Início da semana 2/52		
omega	shares	bonds	carteira	S_t	...		
0.6635	754.04	184.49	938.54	52			

A proporção  $\omega_{50/52} = 0.6635$  a implementar no início da semana 2 (que é, note-se, a terceira) poder-se-ia obter a partir da fórmula de Black-Scholes:

$$\omega_{50/52} = \frac{S_t[1 - N(-h)]}{S_t + P_t} = \frac{52(1 - 0.2939)}{52 + 3.33} = 66.35\%$$

Isto daria, por sua vez, uma estratégia

	Final da Semana 1/52				Início da semana 2/52		
...				S_t	shares	bonds	carteira
				52	622.73	315.81	938.54

e por aí fora.

Note-se que a contagem das semanas começou em zero para que  $\tau$  reflecta o tempo *que falta* para o final do ano. Por exemplo,  $\tau = (52 - i)/52, i = 0, 51$  no caso de períodos semanais. Os valores de  $\tau$  são usados para calcular os  $\omega$  *a vigorar durante o período seguinte*. Mas uma proporção calculada com um  $\tau = 52/52 = 1$  escreve-se  $\omega_{52/52}$  e não  $\omega_{51/52}$ .

**124. Implementação:** Um possível aspecto do modelo que efectua os cálculos acima é o da figura 31. Trata-se apenas de um prolongamento do modelo usado no capítulo 6 para

Seguranca de Carteiras por meio de Bonds equivalentes a Puts

exp	0.925961	sigma	0.3	bonds & shares	
C_t	9.036718	r	0.08	omega	1-omega
				66.35%	33.65%
				puts &	
K	S_t	tau		shares	P_t
50	52	0.9615		18.07	3.335
Gauss:	d_1	d_2	-d_1	-d_2	
	0.541900	0.247725	-0.54190	-0.24772	
N(d)	0.706056	0.597826	0.293943	0.402173	
...	...				

Figura 31: Uma possível distribuição de registos na folha de cálculo que implementa a estratégia de segurança de carteiras por meio de obrigações do Tesouro.

o cálculo da fórmula de Black-Scholes, onde se implementou a estimação de  $\omega$  segundo a fórmula 34. Esta folha de cálculo permite obter, um por um, os resultados descritos acima.

**125** É conveniente aproveitar esta mesma folha de cálculo para determinar o valor da Put protectora equivalente e o número de acções e Puts que este seguro clássico originaria por cada mil dólares investidos. Em 123 as novas fórmulas a introduzir teriam o aspecto

Em P_t,	$-\$S_T * \$N(-D_1) + \$K * \$EXP * \$N(-D_2)$
Em omega,	$+S_T * (1 - N(-D_1)) / (S_T + P_T)$
Em Puts & Shares,	$1000 / (P_T + S_T)$

Isto, caso os registos recebam os mesmos nomes que foram usados na folha de cálculo do capítulo 6.

**126. Tratamento de sucessivos períodos:** As estratégias a adoptar em sucessivos períodos podem também ficar organizadas sob a forma de uma tabela deste tipo ou outro:

semana	tau	omega	S_t	Inicio da semana:			Final da Semana:		
				shares	bonds	carteira	shares	bonds	carteira
t = 0	1	0.7545	56	754.50	245.49	1000	808.39	245.87	1054.2
	1	0.9808	60	870.05	184.21	1054.2	754.04	184.49	938.54
	2	0.9615	52	622.73	315.81	938.54	...		

A coluna  $S_t$  representa a cotação no início da semana  $t$ . A cotação no final da semana  $t$  é  $S_{t+1}$ . Os  $\omega_t$  são calculados pela fórmula (34) a partir de  $S_t$ ,  $r_t$  e  $\tau_t$ . Pode usar-se uma macro simples em 123 para efectuar tal tarefa, dada uma colecção de  $S_t$ , como se verá adiante.

**127. Discussão: Os custos de transação.** O modelo de Black-Scholes pressupõe que os  $\omega$  são ajustados continuamente. A técnica descrita acima usa ajustes discretos, semanais. Espera-se portanto que um número finito mas largo de ajustes seja equivalente, no caso em estudo, ao ajuste contínuo.

Deve notar-se que um ajuste contínuo ou quase seria impossível de realizar, uma vez que os custos de transacção tenderiam para infinito com o número de tais ajustes. Mais adiante abordar-se-á o problema dos custos de transacção.

**128. Propriedades do Hedging dinâmico:** O método descrito acima tem três propriedades com importancia prática:

- Quando uma cotação desce abaixo do preço no exercício,  $K$ , então  $\omega$  sobe acima de  $1/2$  e vice-versa.
- Quando a cotação  $S_t$  sobe,  $\omega$  sobe também. Quando a cotação desce,  $\omega$  desce.
- Quando  $t \rightarrow 1$  pode acontecer uma de duas coisas:
  1. Se  $S_t > K$ , então  $\omega \rightarrow 1$ .
  2. Se  $S_t < K$ , então  $\omega \rightarrow 0$ .

Em teoria, se quando  $t \rightarrow 1$  a razão  $S_t/K$  tendesse para 1, então  $\omega \rightarrow 1/2$ .

É facil deduzir estas propriedades a partir da fórmula (34). Em Benninga (1989) [4] pode encontrar-se este desenvolvimento.

## 7.2 Uma Simulação: Segurança Dinâmica de Carteiras

Qual é o aspecto de uma estratégia de segurança como a descrita na secção 7.1? Podem facilmente aproveitar-se os modelos já desenvolvidos em 123 — o que calcula a fórmula de Black-Scholes (Capítulo 6) e o que simula o comportamento estatístico de bens cotados (Capítulo 5) —, para obter uma colecção de  $S_t$  simulados e a respectiva evolução do valor da carteira segura.

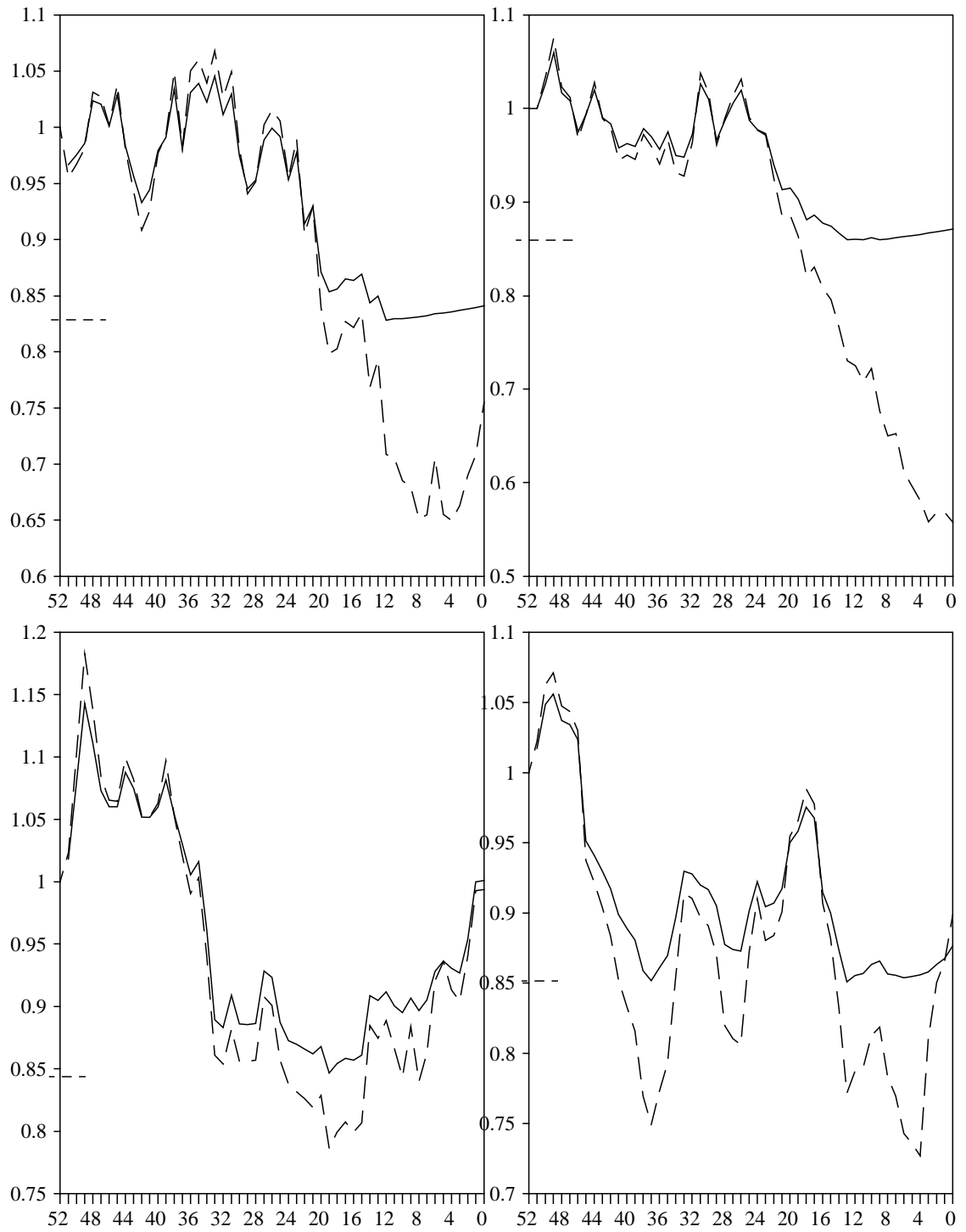


Figura 32: Resultados de quatro simulações. A tracejado, o valor (em milhares de dólares) de uma carteira ao longo de 52 semanas. A cheio, o valor do mesmo investimento, mas seguro.

A forma mais expedita de fazer a folha de cálculo capaz de tal simulação consiste em importar para dentro do modelo que simula cotações, aquele que calcula  $\omega$  de acordo com a fórmula de Black-Scholes. Isto apenas requer o uso dos comandos FILE COMBINE. Depois, procede-se à introdução de um novo loop na macro A e à criação de uma macro, D, para implementar os cálculos extra.

**129. Passos a dar:** Para além do rearranjo de registos que a figura 33 ilustra (ou outro julgado mais conveniente) e das modificações nas macros (a explicar no lugar próprio) podem enunciar-se assim as modificações a introduzir:

- O domínio RESULTS passa a vector-coluna. A coluna que contém o período não é especialmente útil aqui. Isto leva a podar algumas das instruções das macros A e C. O tamanho deste domínio deve reduzir-se para 52 linhas e a sua posição far-se-á coincidir com a coluna  $S_t$  da tabela descrita acima.
- Deve fazer-se coincidir o registo chamado STDDEV com o  $\sigma$  da fórmula de Black-Scholes.
- Deve dar-se um nome — por exemplo, DADOS — a um novo domínio onde os dois registos para entrada de  $S_t$  e  $\tau$  na fórmula (34) apareçam lado-a-lado. Isto pode conseguir-se usando a disposição que a figura 33 ilustra.
- O registo onde se obtém a proporção calculada deve também ter um nome — por exemplo, OMEGA —.
- Por último, a primeira célula do domínio RESULTS deve passar a ter um nome — no exemplo, RESULT 0 — para que a macro A posicione o cursor no lugar apropriado ao início do segundo loop.

Deve ainda acrescentar-se ao modelo resultante da fusão dos dois sugeridos acima, uma tabela onde se possam recolher os valores de  $S_t$  simulados e os respectivos  $\omega_t$  e onde se efectuem os cálculos respeitantes à passagem de cada semana.

130

A nova tabela onde se registam os valores de  $S_t$  simulados e os respectivos  $\omega_t$  e onde se efectuem os cálculos respeitantes à passagem das semanas, poderá conter as seguintes colunas ou outro arranjo semelhante:

- Uma coluna para numerar cada semana começando em zero.

```

Macros:  start t 13:51:35      r_1 0.328152      mean 0.04
        stop t 13:51:56      r_2 0.717909      sigma 0.3
        elapsed 00:00:21     S(1) 0.623078     deltat 0.01923
        counter 53           S(2) 1.232288     in_price 56
        tot_num 26           X(1) 0.404378     shares 17.8571
        tot_per 52           X(2) 0.884671     for each 1000 dollars

Black      K      50      C_t 12.22116      puts &
-Scholes:  exp    0.9231  P_t 2.377        shares 17.13
          risk fr 0.08

                S_t      tau      omega
Zona de dados:  56      1      75.45%

Gauss:      d_1      d_2      -d_1      -d_2
            0.794428 0.494428 -0.79442 -0.49442
N(d)       0.786527 0.689498 0.213472 0.310501
...         ...

```

Figura 33: Uma possível distribuição de registos na folha de cálculo que simula a estratégia de segurança de carteiras por meio de obrigações do Tesouro, para sucessivos períodos semanais.

- Outra, onde se calcula  $\tau$  a partir do número da semana.
- Três colunas para calcular o valor das acções, das obrigações e o total da carteira no início de cada semana.
- Três colunas mais para calcular o valor das acções, obrigações e total em carteira no final de cada semana.
- Uma coluna para guardar os  $\omega_t$  depois de calculados pela fórmula (34) a partir dos  $S_t$ , e  $\tau_t$  respectivos. Pressupõe-se que  $r$  é constante.
- Finalmente, é interessante acrescentar uma coluna para calcular o valor de uma carteira composta exclusivamente por activo e cujo investimento inicial fosse igual ao da carteira protegida.

A figura 34 ilustra uma possível disposição de domínios na folha de cálculo, capaz de implementar a tabela referida. Aqui, optou-se por deslocar todos os cálculos referentes ao final da semana uma linha para baixo de modo a alinhá-los com a cotação que lhes deu origem. A coluna VALOR, juntamente com a coluna CARTEIRA no início da semana formam o

sem	Final da semana			S <sub>t</sub>	tau	omega	valor	Inicio da semana		
	shares	bonds	carteira					shares	bonds	carteira
0				56.00	1	0.7545	1000	754.50	245.50	1000
1	771.39	245.88	1017.2	57.25	0.9807	0.7789	1022.3	792.39	224.88	1017.2
2	823.56	225.23	1048.7	59.51	0.9615	0.8183	1062.6	858.27	190.52	1048.7
3	865.24	190.82	1056.0	59.99	0.9423	0.8267	1071.2	873.09	182.96	1056.0
	...			...						
50	87.15	776.17	863.32	47.63	0.0384	0.2167	850.52	187.11	676.20	863.32
51	190.43	677.25	867.68	48.47	0.0192	0.2375	865.62	206.11	661.57	867.68
52	214.01	662.58	876.59	50.33		0				

Figura 34: Disposição possível de domínios na tabela que recolhe cotações simuladas  $S_t$  e as proporções  $\omega_t$  que estas originam.

eixo das ordenadas nos gráficos que a figura 32 mostra. O eixo das abcissas é o número de semanas que faltam para o final do ano.

**131. As macros:** Apenas são precisas pequenas modificações na macro A e C, para além de uma nova, a D. Na macro A acrescenta-se um segundo loop depois de posicionado o cursor no registo RESULT 0 que é a primeira célula da coluna RESULTS. Este posicionamento é necessário ao funcionamento da macro D. Eis uma listagem da macro A depois de modificada.

```
blank RESULTS
let DELTAT,1/(2*TOT_NUM)
put RESULTS,0,0,IN_PRICE

for COUNTER,1,TOT_NUM,1,\B
goto}RESULT_0

for COUNTER,1,2*TOT_NUM,1,\D
calculate
home
quit
```

A macro B — onde se simulam números Gaussianos — é a mesma. Quanto á macro C, devem apenas retirar-se as duas últimas instruções, as respeitantes ao contador de períodos. Depois disso, C ficará:

```
put RESULTS,0,2*COUNTER-1,
```



```

    @exp(MEAN*DELTAT+STDEV*@sqrt(DELTAT)*X(1))*@index(RESULTS,0,2*COUNTER-2)
put RESULTS,0,2*COUNTER,
    @exp(MEAN*DELTAT+STDEV*@sqrt(DELTAT)*X(2))*@index(RESULTS,0,2*COUNTER-1)

```

Finalmente, a nova macro, a D, será executada tantas vezes quantas os períodos a considerar. Ela copia  $S_t$  e  $\tau$  para o registo DADOS onde a fórmula (34) é avaliada. A linha seguinte coloca a proporção encontrada no seu lugar na tabela e posiciona o cursor para repetir o processo na linha de baixo. Eis o seu aspecto em 123:

```

/rv{right}~DADOS~{calc}~
{right 2}+OMEGA~/rv~~{left 2}{down}

```

Note-se que esta solução não é nem a mais rápida nem a mais elegante. Mas é a que requer menos modificações no modelo resultante da fusão das duas folhas de cálculo originais. Podia ter-se usado o loop que executa as macros B e C para a determinação de  $\omega$ . Porém, deve notar-se que este loop é executado TOT NUM vezes, ao passo que o número total de semanas simuladas — e portanto o de diferentes  $\omega$  — é o dobro.

O comando CALC com que o segundo loop termina recalcula as fórmulas da tabela de acordo com os novos valores de  $S_t$  e  $\omega$ .

### 7.3 A Segurança de um Ganho Pré-Determinado

Até aqui tem-se considerado apenas o problema de como construir Puts artificiais. Um outro problema que interessa aos investidores seria o de obter uma carteira de Puts e activo capaz de garantir o ganho *total* sobre todo o investimento inicial.

132      Veja-se um exemplo: Um investidor tem 100 dólares e quer garantir que dentro de um ano terá pelo menos  $100 \times Z$ . Ele deseja comprar uma porção de activo — cuja cotação actual é  $S_0$  — e uma porção igual de Puts com um preço no exercício de  $K$ . Assim, este investidor terá que comprar uma porção  $\alpha$  do activo tal que

$$\alpha = \frac{100}{S_0 + P_0(S_0, K)}.$$

O ganho mínimo por cada dólar investido será portanto  $\alpha K$ . O que se pretende é que esse ganho iguale  $100Z$  e portanto

$$\alpha = \frac{100Z}{K}.$$

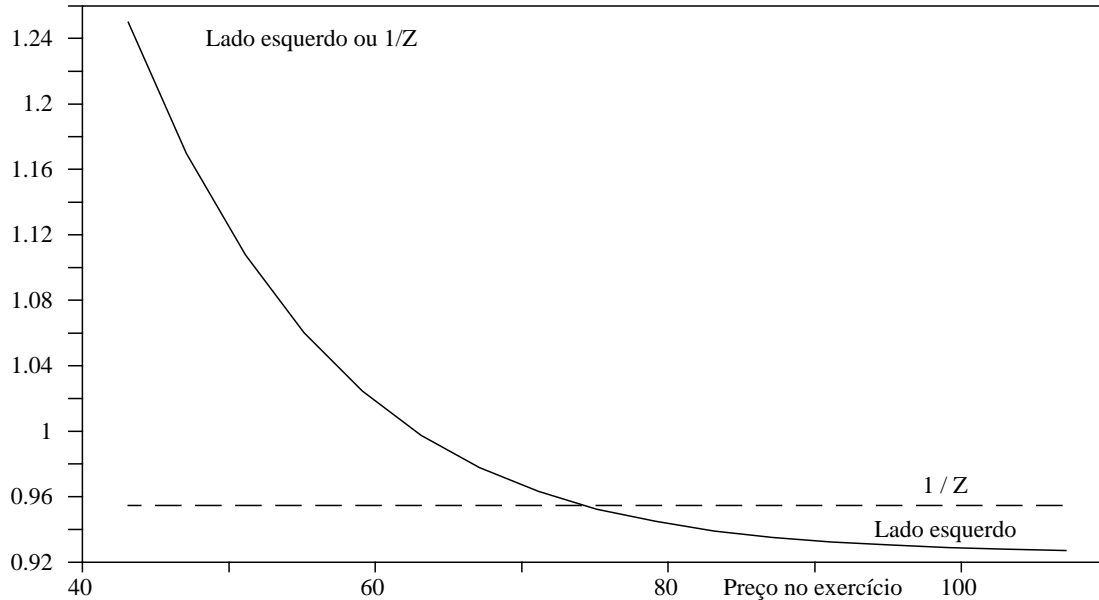


Figura 35: A fórmula que relaciona um ganho,  $Z$ , pré-determinado, com os parâmetros de uma carteira com activo e Puts. Cada curva representa um dos lados da equação. A sua intersecção é uma solução.

Consequentemente, pode garantir-se o ganho mínimo desejado quando

$$S_0 + P_0(S_0, K) = \frac{K}{Z}$$

Esta igualdade desenvolve-se de acordo com a fórmula de Black-Scholes:

$$S_0 N(h) + K e^{-r} N(\sigma - h) = \frac{K}{Z} \quad \text{onde} \quad h = \frac{\log\left(\frac{S_0 e^r}{K}\right)}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}$$

Dividindo ambos os membros por  $K$  obtém-se:

$$\frac{S_0}{K} N(h) + e^{-r} N(\sigma - h) = \frac{1}{Z}. \quad (35)$$

A primeira coisa que se descobre acerca da equação (35) é que cada um dos seus membros varia com  $K$ , o preço no exercício, segundo o que o gráfico da figura 35 representa. A intersecção das duas linhas indicará o valor de  $Z$  correspondente a uma solução de (35). Além disto, pode facilmente ver-se que não existe solução para (35) a não ser que  $Z < e^r$ . O significado económico deste facto é que não se pode implementar uma estratégia de segurança com activo e Puts e garantir o ganho livre de risco. Quem quiser garantir um ganho de  $r$  deverá investir em títulos do Tesouro. Depois disso, pode-se então pensar

Z: Seguranca de ganhos totais:

Black-	K	56	exp	0.923116	Equacao a usar:
Scholes:	S_0	56	C_t	8.798330	left = 1/Z
	sigma	0.3	P_t	-13.5995	1.080229 0.952380
	r	0.08	Z	1.05	

Gauss:	d_1	d_2	-d_1	-d_2
d	0.416666	0.116666	0.416666	-0.116666
N(d)	0.661538	0.546437	0.661538	0.453562
	...			

Figura 36: Disposição possível de domínios na folha de cálculo que implementa o cálculo da fórmula para segurança dos ganhos totais.

em aumentar os ganhos investindo uma certa proporção em bens mais voláteis, segundo a estratégia descrita na secção 7.1 e implementada em 7.2.

**133** Para implementar a equação (35) basta simplificar e modificar ligeiramente qualquer das folhas de cálculo que determinam o preço das Call pela fórmula de Black-Scholes. Na figura 36 mostra-se uma possível disposição de campos. O gráfico da figura 35 foi obtido a partir deste modelo com os comandos DATA TABLE 1.

O registo LEFT calcula o lado esquerdo da equação (35) e o registo 1/Z (ou INV Z como será chamado mais adiante), o seu lado direito.

**134. Resolução em ordem a  $K$ :** Para calcular  $K$  seria preciso resolver (35) em ordem a  $K$ . Analiticamente não é possível fazê-lo. Mas uma simples macro em 123 pode rapidamente achar o valor de  $K$  que satisfaz (35), dados os  $S_0$ ,  $Z$  e  $r$ . Esta macro baseia-se num mecanismo iterativo com os seguintes passos:

1. Dêem-se os valores de  $S_0$ ,  $\sigma$ ,  $Z$  e  $r$  para o problema em causa.
2. Ache-se um  $K$  (chamado o LOW  $K$ ) para o qual

$$\frac{S_0}{K}N(h) + Ke^{-r}N(\sigma - h) > \frac{1}{Z}$$

3. Ache-se depois outro  $K$  (chamado o HIGH  $K$ ) para o qual

$$\frac{S_0}{K}N(h) + Ke^{-r}N(\sigma - h) < \frac{1}{Z}$$

4. Deixe-se  $K$  igualar a média de LOW K com HIGH K e calcule-se então

$$\frac{S_0}{K}N(h) + Ke^{-r}N(\sigma - h)$$

Se esta expressão — chamada PORT nas macros — for *menor* que  $1/Z$ , substitua-se o valor actual de HIGH K por  $K$ . Se ela for *maior*, substitua-se o valor actual de LOW K por  $K$ .

5. Repita-se o passo anterior até que se obtenha o desejado grau de precisão: Para um dado  $\varepsilon$  muito pequeno, o processo iterativo repetir-se-á até que

$$\frac{S_0}{K}N(h) + Ke^{-r}N(\sigma - h) - \frac{1}{Z} < \varepsilon$$

$\varepsilon$  representa o grau desejado de precisão.

O algoritmo apresentado é muito geral e pode ser usado em outras circunstâncias. O seu único problema consiste na incapacidade para fugir de falsas soluções quando algum dos lados da equação em causa não é monotónica. A forma das curvas que a figura 35 documenta — monotonicamente decrescente o lado esquerdo e constante o direito — garante a sua convergência no caso presente.

**135. Implementação:** É muito fácil implementar este algoritmo numa folha de cálculo aproveitando uma das já existentes (por exemplo, a da secção 7.2). Basta simplificar alguns aspectos agora inúteis — como a necessidade de ter em conta  $\tau$  diferentes da unidade — e introduzir fórmulas para o cálculo do lado esquerdo da equação (35) e do correspondente lado direito — que é apenas  $1/Z$  —. A figura 37 mostra uma possível ordenação dos registos. O registo LEFT contém o referido lado esquerdo. Em caso de sucesso na busca de um  $K$  que seja raiz da equação (35), este registo deverá igualar INV Z.

**136. As macros:** A macro A sugere dois valores arbitrários para LOW K e HIGH K.

```
let LOW K,50
let HIGH K,85
branch B
```

Se o valor de LOW K não é suficientemente pequeno para tornar LEFT maior do que INV Z, a macro B encarrega-se de o ir dividindo ao meio até que seja:

Seguranca dos ganhos totais: Calculo interactivo de K.

```
Black-      K      58.54812      exp      0.923116
Scholes:    S_0      56      C_t      7.582904
           sigma    0.3      P_t      -6.21793
           r        0.08
```

```
Interact:  epsilon 0.000001  port      1.052632
           low k  58.54812  low port   1.168
           high k 58.54919  high port   0.938
```

```
starttime11:08 PM      Z      0.95
stoptime 11:08 PM      inv Z   1.052631
elapsed      0.00      left    1.052632
```

```
Gauss:      d_1      d_2      -d_1      -d_2
d           0.268342 -0.03165 0.268342 0.031657
           ...
```

Figura 37: Disposição possível de domínios na folha de cálculo capaz de determinar interactivamente  $K$ .

```
let K,LOW K
calculate
let LOW PORT,LEFT
if LOW PORT<INV Z
let LOW K,LOW K/2
branch B
branch C
```

Por sua vez, se HIGH K não é suficientemente elevado para tornar LEFT menor do que INV Z, a macro C encarrega-se de o ir multiplicando por dois até que seja:

```
let K,HIGH K
calculate
let HIGH PORT,LEFT
if HIGH PORT>INV Z
let HIGH K,2*HIGH K
branch C
branch D
```

A macro D calcula o valor médio de LOW K e HIGH K e implementa o resto do algoritmo descrito acima. O registo EPSILON deve conter um número muito pequeno que expressa

o grau de precisão desejado. Quando a diferença entre PORT e o lado direito da fórmula é menor do que esse número, a macro dá por finda a iteração.

```
let K,(HIGH K+LOW K)/2
calculate
let PORT,LEFT
if PORT>INV Z){let LOW K,K
if PORT<INV Z){let HIGH K,K
if @abs(PORT-INV Z)<EPSILON
```

Como se vê, é fácil implementar em 123 um algoritmo que, sem ser dos mais eficientes, tem a vantagem de ser simples.

## 7.4 Puts Implícitas e o Valor dos Activos

Até agora apenas se estudou o uso de Puts, reais ou artificiais, na segurança de carteiras. Vai-se agora inverter a lógica deste processo: Estudar-se-á o caso de como analisar carteiras onde existem já à partida Puts implícitas. O problema que se pretende resolver é o de descobrir o valor real dos activos, i.e., como separar o valor dos activos do das Puts que lhes estão associadas.

**137** Muitas situações comuns representam activos que incluem Puts implícitas. Basta pensar em todos os casos em que um vendedor oferece um dado bem juntamente com a opção de o devolver se o comprador não tiver ficado satisfeito. Em projectos de investimento, a opção de abandonar o projecto ou outras, criam também situações deste tipo.

Quando se conhece a variância da cotação do activo é possível deduzir o seu valor real pelo valor ao que ele é oferecido. Sem esta informação, pode ainda deduzir-se o *locus* da sua variância e do verdadeiro valor. O conhecimento deste locus pode ser suficiente para obter o valor real a partir de considerações complementares. Vai-se portanto ver como proceder para o calcular.

**138** Seja  $V_a$  o valor real de um activo, despido de qualquer opção. Seja  $V_p$  o valor da Put que lhe está implícita. O preço de venda, que inclui a Put, será  $Y$  e o preço que custa recuperar  $Y$  — trazer de volta o investimento — será  $K$ . Portanto,

$$Y = V_a + V_p$$

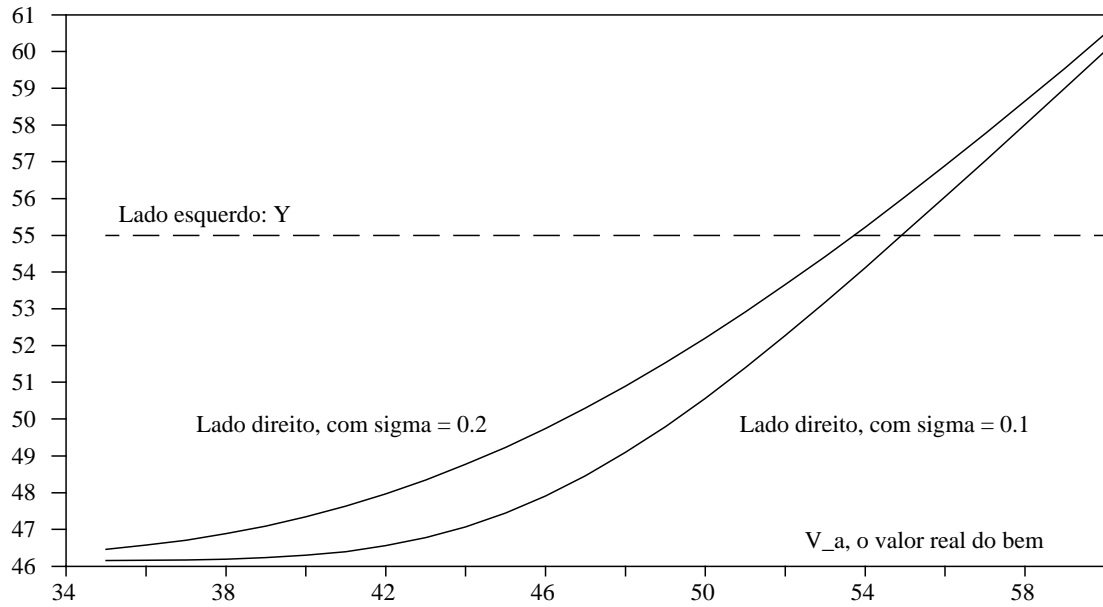


Figura 38: Determinação gráfica da raiz da equação onde se acha o *locus* do desvio-padrão  $\sigma$  e do verdadeiro valor  $V_a$  de um bem afectado por uma Put implícita. A tracejado, o lado esquerdo da equação.

Se a opção em causa obedece à fórmula de Black-Scholes, ter-se-á:

$$V_p = -V_a N(-h) + K e^{-r\tau} N(\sigma\sqrt{\tau} - h) \quad \text{com} \quad h = \frac{\log\left(\frac{V_a e^{r\tau}}{K}\right) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Pretende-se descobrir o par  $\{\sigma, V_a\}$  que resolve simultaneamente a equação

$$\begin{aligned} Y &= V_a [1 - N(-h)] + K e^{-r\tau} N(\sigma\sqrt{\tau} - h) \\ &= V_a N(h) + K e^{-r\tau} N(\sigma\sqrt{\tau} - h) \end{aligned}$$

O lado direito desta equação cresce com  $\sigma$ . Uma representação gráfica de ambos os lados para dois valores de  $\sigma$  pode ver-se na figura 38. Deixa-se como exercício a obtenção não gráfica da raiz desta equação para  $\sigma$  dados.

## 7.5 Exercícios

**139.** Um dos problemas da segurança de carteiras é o risco de falhar os objectivos propostos por causa de se usarem intervalos finitos para revisão da estratégia, em vez de usar ajustes contínuos. A fim de ganhar sensibilidade a este problema, correr a simulação levada a cabo

na secção 7.1 com apenas 24 períodos de revisão por ano. Tomar nota do número de vezes em que o valor final da carteira é menor do que o que deveria.

Note-se que no exemplo usado, a estratégia para o activo com uma cotação inicial de 56 dólares e com  $K = 50$ , sendo  $\sigma = 0.3$  e  $r = 0.08$ , é equivalente a comprar 17.13 acções desse activo. Portanto, uma forma razoável de definir o objectivo a atingir será dizer que o valor final da carteira não deverá atingir menos de  $17.13 \times 50 = 856.50$  dólares.

**140.** Foi oferecida a possibilidade de comprar activo de uma empresa. O vendedor quer 55 dólares por acção mas oferece-se para retomar o activo no fim de 60 dias a 52 dólares. Se o  $\sigma$  dos ganhos logarítmicos deste activo for 30%, qual será o verdadeiro valor de cada acção? Assumir um  $r = 12\%$ .

## 7.6 Outras Estratégias de Investimento com Opções

Este apêndice refere de forma breve alguns outros conceitos e técnicas de segurança de investimentos baseadas em opções. Para evitar confusões, convém desde o início distinguir claramente entre dois objectivos da utilização de opções nesse contexto:

- para proteger carteiras contra variações na cotação de activos (*hedging*), ou
- tirar proveito de eventuais diferenças existentes entre a informação disponível por parte de investidores individuais e a percepção do mercado.

Alguns exemplos do primeiro tipo de objectivos já foram explorados em capítulos anteriores: trata-se de implementar estratégias defensivas face à volatilidade das cotações. O segundo tipo implica pressupostos opostos aos do primeiro pois é essencialmente ofensivo. Acontece que, em não poucos casos, a mesma estratégia pode ser usada tanto no contexto do primeiro como do segundo tipo de objectivos. Por exemplo, pode criar-se uma carteira neutra em relação a *delta*, tanto para proteger um investimento como para tirar partido de assimetrias informativas.

### 7.6.1 Delta-Neutral Hedge

Viu-se que o *Delta* de uma opção, ( $\Delta$ ), é a sensibilidade do seu preço,  $S_t$  ou  $P_t$ , a mudanças na cotação do activo subjacente. Pode escrever-se:

$$\Delta = \frac{\text{Variação em } C_t}{\text{Variação em } S_t} \quad (36)$$



Um Delta de 0.6 significa que, se a cotação de um activo,  $S_t$ , varia em um dólar, então o preço da opção,  $C_t$ , variará 0.6 dólares. Assim, uma carteira que consistir em 60% de acções e 40% de opções pode fazer com que as variações em  $C_t$  e  $S_t$  se contra-balancem deixando o investidor na mesma posição, desde que os seus efeitos sobre a riqueza desse investidor actuem em direcções opostas.

**141** Chama-se “Delta-Neutral Hedge” a qualquer estratégia de protecção de carteiras onde Delta é usado para contrabalançar as variações na cotação de um activo com os preços de outros activos subordinados. Por exemplo, a escrita de uma Call por cada Delta unidades de activo em carteira é um Delta-Neutral Hedge onde os custos iniciais da posição,  $\Delta S_t - C_t$  se mantêm (verificar com a fórmula de Black-Scholes).

Uma vez que o Delta das opções não é estático (como se pode ver pela figura 39, é preciso refazer as proporções de activos na carteira, período a período, à medida que o tempo passa.

**142** A estratégia ofensiva correspondente ao Delta-Neutral Hedge consiste em aproveitar o facto de opções estarem a ser sub- ou sobre-valorizadas pelo mercado para fazer lucros extra. Assim,

- Quando  $C_{\text{mercado}} > C_{\text{real}}$  a Call está sobre-valorizada. Nesse caso, comprando uma porção  $\Delta S$  do activo por cada Call escrita, conduzirá a uma posição capaz de tirar proveito dessa sobre-valorização.
- Quando  $C_{\text{real}} > C_{\text{mercado}}$  a Call está sub-valorizada pelo mercado. Vendendo  $\Delta S$  do activo por cada Call que se comprar, conduz também a uma posição de vantagem sobre o mercado.

Qualquer destas posições carece de ser ajustada período a período de modo a assegurar um Delta total nulo. Note-se que, como em muitos outros casos, uma posição Delta-Neutral não está garantida contra variações muito bruscas de  $S_t$  já que o Delta é apenas uma aproximação de primeira ordem ao problema da influência de  $S_t$  sobre  $C_t$ .

**143** Os Delta de várias posições no mesmo activo são aditivos:

$$\Delta_{\text{Total}} = \sum_i \omega_i \Delta_i$$

Por exemplo, a compra de 10 Call com um Delta de 0.5 a compra de 10 Put com um Delta de 0.6 dará uma carteira com

$$\Delta_{\text{Total}} = 10 \times 0.5 - 10 \times 0.6 = -1$$

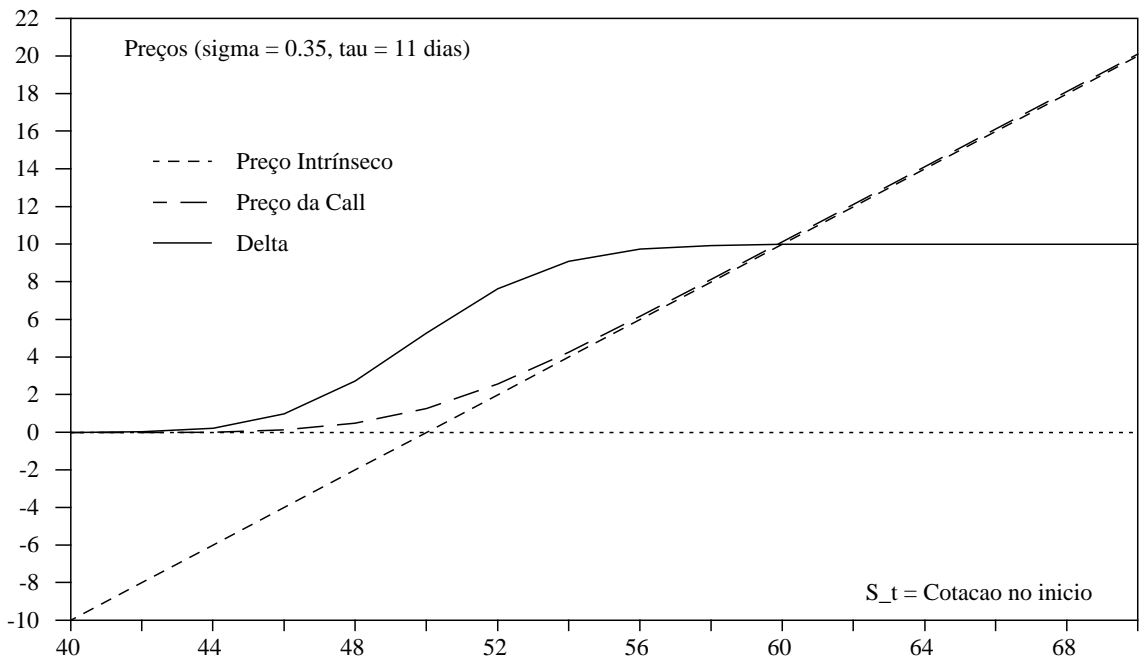
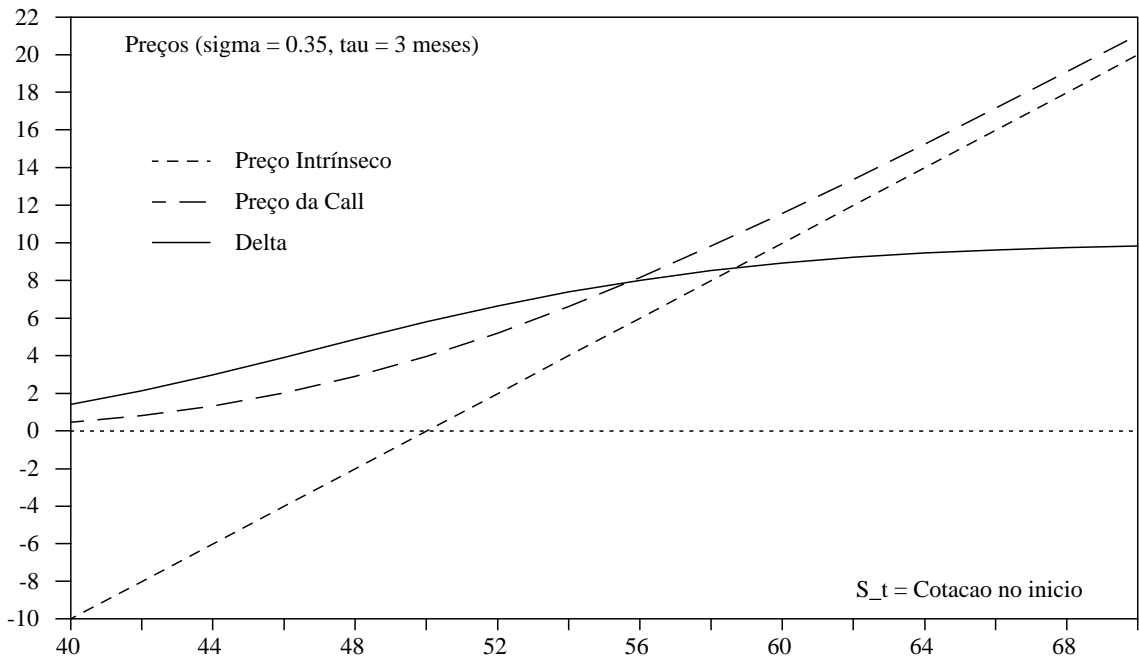


Figura 39: Variação de Delta com  $S_t$  e com  $t$ .

e portanto esta posição é semelhante à venda curto de uma porção de activo. Uma vez que os Delta são aditivos, ter em carteira  $n_1$  opções sobre o activo 1 e mais  $n_2$  opções sobre o activo 2 é equivalente a possuir uma carteira com  $\Delta = n_1\Delta_1 + n_2\Delta_2$ .

Portanto, sempre que, numa dada carteira contendo dois activos, se verificar

$$n_1\Delta_1 + n_2\Delta_2 = 0 \quad \text{ou a relação} \quad \frac{n_1}{n_2} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \quad (37)$$

então a posição dessa carteira é *Delta-Neutral*. O sinal  $-$  mostra que, em condições normais, só se obtém uma carteira *Delta-Neutral* quando uma das duas posições é curta ou equivalente.

144 Como já foi referido, as posições Delta-Neutrais e muitas outras, são de natureza dinâmica: é preciso ir ajustando com regularidade as proporções de cada activo na carteira já que os movimentos das cotações desses activos fazem com que a carteira perca o seu *hedge*, ao deixar de ter um Delta neutro. A fórmula de Black-Scholes é uma aproximação de primeira ordem (corresponde a ter-se em conta apenas o primeiro termo de uma expansão em série de Taylor) e portanto, variações rápidas na cotação de activos não são bem aproximadas.

### 7.6.2 Gama: Robustez de um Hedge

Perante o problema enunciado acima, é natural que os investidores desejem ter uma ideia da vulnerabilidade dos seus *hedges* a variações bruscas na cotação dos activos (os  $S_t$ ). Daqui nasceu a noção de Gama ( $\Gamma$ ). Este novo parâmetro, muito usado em estratégias que usam opções, define-se da seguinte forma:

$$\Gamma = \frac{\text{Variação em } \Delta}{\text{Variação em } S_t} \quad (38)$$

Trata-se portanto de uma segunda diferença de  $C_t$  com  $S_t$  e mede a robustez de um dado Delta perante variações bruscas de  $S_t$ . No caso de se estar a tentar manter  $\Delta = 0$ , quanto menor  $\Gamma$ , mais robusto é um *hedge*.

## Capítulo 8

# Duração e estratégias de Imunização

Este capítulo revê alguma da teoria e aplicações numéricas ligadas à análise da duração e às estratégias de imunização com obrigações de cupão fixo. A análise da *duração* é o estudo da sensibilidade da cotação de tais obrigações a mudanças na taxa de juro. Trata-se de uma análise largamente usada na gestão de carteiras de obrigações. Aqui, só interessam os aspectos desta análise mais ligados à forma como se pode avaliar a duração com a ajuda de folhas de cálculo.

**145** Uma *estratégia de imunização* consiste em fazer a gestão de uma carteira de obrigações de modo a conseguir que “o seu valor seja sempre tão próximo quanto possível do valor de outro activo” (Nelson & Schaefer (1983) [29]). Este assunto é uma continuação natural da análise da duração.

### 8.1 Duração

A duração mede a sensibilidade da cotação de uma obrigação a mudanças na taxa de juro à qual os meios por ela libertos são descontados.

Considere-se uma obrigação com pagamentos de  $C_t, t = 1, \dots, N$ . Em geral, os primeiros  $N - 1$  pagamentos referem-se a juros e o último,  $C_N$  será a soma de duas parcelas: a amortização de todo o capital e mais o último juro. Considere-se agora o valor actual da média destes pagamentos, ponderada pelo tempo que falta para a efectivação de cada um deles:

Período	Pagamento	Tempo × Pagamento	NPV
1	$C_1$	$C_1 \times 1$	$C_1/(1+r)$
2	$C_2$	$C_2 \times 2$	$C_2/(1+r)^2$
3	$C_3$	$C_3 \times 3$	$C_3/(1+r)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$N$	$C_N$	$C_N \times N$	$C_N/(1+r)^N$

Isto é, a referida média ponderada pelo tempo que falta decorrer para cada um destes pagamentos poder-se-á escrever

$$\sum_{t=1}^N \frac{C_t t}{(1+r)^t}$$

Define-se *duração* como o valor acima, quando expressa na forma de uma percentagem do valor actual da obrigação:

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^N \frac{C_t t}{(1+r)^t} \quad (39)$$

$r$  continua a ser a taxa de juro.  $P$  é o valor actual da bond.

**146. Dois exemplos:** Considerem-se duas obrigações: a “bond A” foi emitida agora. O seu valor facial é mil dólares, oferece a taxa de juro actual (7%) e matura em 10 anos; a “bond B” foi emitida há cinco anos quando a taxa de juro era mais elevada. Tem também um valor facial de mil dólares mas oferece 13% por cada cupão. Quando emitida, esta segunda obrigação tinha uma maturidade de 15 anos. Faltam portanto mais dez para a maturidade. Uma vez que a taxa de juro que se está a praticar agora é 7%, a cotação desta segunda obrigação é

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{1000 \times 0,13}{(1+0,07)^t} + \frac{1000}{(1+0,07)^{10}} = 1421,41 \text{ dólares}$$

Para se calcular a duração de cada uma destas obrigações é conveniente fazer-se uma tabela como a da figura 40 na página 118. Mais adiante se verá um método menos trabalhoso para achar a duração.

**147** Como seria de esperar, a duração da bond A é maior do que a da B já que os pagamentos médios de A levam mais tempo do que os da B. Pode ver-se isto de outra maneira: O valor actual líquido do pagamento da bond A no primeiro ano é 70 dólares. Isto representa 6,54% do seu preço enquanto que o valor actual líquido de B referente ao

Bond A: 0 em 10			Bond B: 5 em 15	
	1000	1000	1000	1421.41
	7%	1.07	13%	1.07
t	C_t	fraccao	C_t	fraccao
1	70	0.065420	130	0.085475
2	70	0.122281	130	0.159766
3	70	0.171422	130	0.223972
4	70	0.213610	130	0.279092
5	70	0.249545	130	0.326043
6	70	0.279863	130	0.365655
7	70	0.305147	130	0.398690
8	70	0.325925	130	0.425837
9	70	0.342678	130	0.447726
10	1070	5.439337	1130	4.041301
total, duracao:			7.515232	6.753561

Figura 40: Tabela para a análise da duração de duas bonds, A e B.

pagamento do primeiro ano é 130 dólares, que são 8,55% do seu preço. Os números para o segundo ano são respectivamente 12,23% e 15,98%. Para se obterem os valores referentes ao segundo ano é preciso dividir a linha correspondente da tabela 40 por dois, já que na fórmula da duração, (39), cada pagamento é pesado pelo número de períodos que irão decorrer até à sua efectivação.

## 8.2 A Duração e a Volatilidade dos Preços

Para se ver como a duração pode ser usada para estimar a volatilidade das cotações, escreva-se a cotação corrente de uma obrigação na forma

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

A *mudança na cotação* devida a uma mudança na taxa de juro  $r$ , será dada por

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{t=1}^N \frac{-t C_t}{(1+r)^{t-1}} \quad \text{que se pode escrever} \quad \frac{dP}{dr} = \frac{-D P}{1+r}$$

A fórmula acima proporciona duas interpretações úteis para  $D$ , a duração. Em primeiro lugar, a duração pode ser olhada como a elasticidade do preço de uma obrigação em relação à taxa de juro:

$$-D = \frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dr}{1+r}}$$

Em segundo lugar, ela pode ser usada para medir a volatilidade da cotação da obrigação, como se pode ver em

$$\frac{dP}{P} = -D \frac{dr}{1+r} \quad \text{ou ainda} \quad dP = -D P \frac{dr}{1+r}$$

Volte-se aos exemplos acima. Suponha-se que a taxa de juro sobe 0,7%, de 7% para 7,7%. O que acontecerá aos preços? No caso da bond A ele virá:

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{1000 \times 0,07}{(1+0,077)^t} + \frac{1000}{(1+0,077)^{10}} = 952,39 \text{ dólares}$$

E no caso da bond B seria da mesma forma

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{1000 \times 0,13}{(1+0,077)^t} + \frac{1000}{(1+0,077)^{10}} = 1360,5 \text{ dólares}$$

A fórmula da volatilidade das cotações prevê que as mudanças no preço das obrigações podem ser aproximadas pela expressão

$$\Delta P \approx -DP\Delta r, \quad \text{uma diferença finita, semelhante a} \quad dP = -D P \frac{dr}{1+r}.$$

Vejam-se os valores no exemplo que se está a estudar:

Bond	$\Delta P$	$D$	$P$	$\Delta r$	$-D P \Delta r$
A	-41,61	7,52	1000	0,007	-52,64
B	-60,91	6,75	1421	0,007	-67,14

### 8.3 Fórmulas Abreviadas Para a Duração

A análise da duração requer uma boa quantidade de cálculos morosos. Pior ainda, pelo facto de esses cálculos envolverem somatórios com um número variável de parcelas, não são facilmente automatizáveis. No caso especial em que se está a calcular a duração de uma obrigação cujos cupões pagam o mesmo ao longo de todos os períodos, Chua (1984) [12] e Babcock (1985) [2] deduziram fórmulas capazes de simplificar os cálculos. Estas fórmulas fornecem ainda intuições interessantes sobre o conceito de duração.

148

Vai-se primeiro reproduzir as linhas gerais do raciocínio de Chua. Considere-se uma obrigação com  $N$  cupões até à maturidade. Suponha-se que em cada  $t, t = 1, \dots, N$ , este activo paga um cupão com o valor de  $C$  e que em  $t = N$ , o período final, paga, além deste  $C$ , um valor de  $F$  que é a amortização do seu valor facial. Se a cotação corrente no mercado

é  $P$ , então o ganho,  $r$ , até à maturidade (*yield to maturity, YTM*) desta obrigação, pode calcular-se da mesma forma como se calcularia uma taxa interna de rendibilidade de um activo ao seu preço actual. Seria preciso achar um  $r$  tal que

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^N}$$

A fórmula da duração é dada por

$$D = \frac{1}{P} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{tC}{(1+r)^t} + \frac{NF}{(1+r)^N} \right]$$

Se se definir

$$X = \sum_{t=1}^N \frac{t}{(1+r)^t}$$

pode escrever-se a fórmula da duração desta forma:

$$D = \frac{CX + NF/(1+r)^N}{P}$$

Além disso, pode facilmente ver-se que

$$\frac{X}{1+r} - X = \frac{N}{(1+r)^{N+1}} - \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+r)^t}$$

Tenha-se agora presente que a parcela que aparece acima a subtrair,

$$\sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+r)^t},$$

é o valor actual de uma anuidade com  $N$  períodos a 1 dólar por período, descontada a uma taxa de juro de  $r$ . Calcula-se com a função  $@PV(1, r, N)$  da folha de cálculo 123. Pode-se portanto dizer que

$$PV(1, r, N) + \frac{X}{1+r} - X = \frac{N}{(1+r)^{N+1}}$$

Por outro lado, é bem sabido (ver, por exemplo, Brealey & Myers 1981 [31]) que

$$PV(1, r, N) = \frac{(1+r)^N - 1}{r(1+r)^N}$$

Com um pouco de manipulação algébrica pode obter-se a seguinte expressão para  $X$ :

$$X = \frac{(1+r)^{N-1} - (1+r) - rN}{r^2(1+r)^N}$$



Daqui se obtém a fórmula de Chua para o cálculo simplificado da duração:

$$D = \frac{1}{P} \left[ C \frac{(1+r)^{N+1} - (1+r) - rN}{r^2(1+r)^N} + \frac{NF}{(1+r)^N} \right] \quad (40)$$

Babcock simplificou ainda mais a expressão acima, obtendo

$$D = N \left( 1 - \frac{y}{r} \right) + \frac{y}{r} PV(1, r, N)(1+r) \quad (41)$$

onde  $y = C/P$  é muitas vezes referido como o ganho actual, (*current yield*), de uma obrigação. A fórmula simplificada de Babcock fornece duas intuições importantes acerca da duração:

- A duração é uma média ponderada da maturidade e de  $1+r$ , pelo PV associado com a obrigação.
- Em muitos casos o ganho,  $y$ , da obrigação não será muito diferente do seu ganho até à maturidade,  $r$  e a duração não será muito diferente de  $(1+r)PV$

Estas intuições têm implicações práticas, algumas das quais serão exploradas a seguir.

## 8.4 A Duração e o Ganho Até à maturidade (YTM)

Podem usar-se as fórmulas de Chua ou Babcock para calcular o efeito, no valor da duração de uma obrigação, de mudanças no ganho até à maturidade. Considere-se o seguinte exemplo: Uma obrigação com maturidade de dez anos e um cupão anual que paga 155 dólares, está sujeita a um YTM (ganho até à maturidade ou  $r$ ) de 7%. Isto dá uma cotação  $P$  de 1597 dólares e uma duração de 5,55. Qual será o efeito no valor dessa duração de uma mudança neste  $r$ ?

149 Para resolver o problema constroi-se uma folha de cálculo que implementa a fórmula de Chua. A disposição dos campos nesta folha pode ser o que se sugere na figura 41. Esta figura mostra também os valores que se obtém no caso do exemplo acima.

O aspecto, em 123, das fórmulas que implementam (40) e os outros desenvolvimentos mostrados acima, é o seguinte:

Preco	@PV(CUPAO, YTM, MATUR)+V_FAC/[1+YTM]^MATUR
Duracao	(1/PRECO)*(CUPAO*PARC_1+PARC_2)
[1+YTM]	1+YTM
parc_1	([1+YTM]^(MATUR+1)-[1+YTM]-YTM*MATUR)/(YTM^2*[1+YTM]^MATUR)
parc_2	+MATUR*V_FAC/(1+YTM)^MATUR

Preco	1597	Duracao	6.55
YTM	7.00%		
Maturidade	10 anos	[1+YTM]	1.07
Cupao	155	parc_1	34.74
V_fac	1000	parc_2	5083.49

Figura 41: Implementação em folha de cálculo da fórmula de Chua.

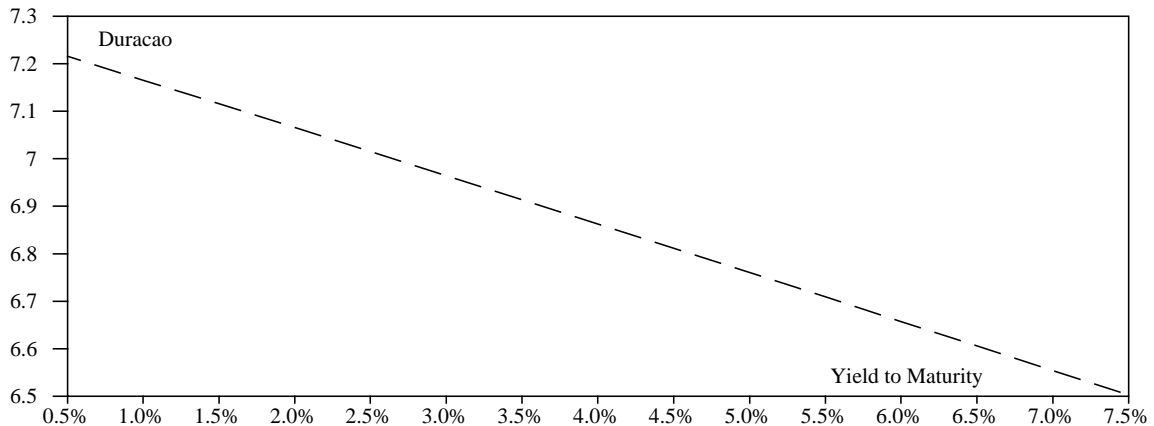


Figura 42: Modo como a duração varia com o YTM.

Aqui, chama-se YTM, *yield to maturity* à taxa  $r$ . PARC 1 e PARC 2 são os registos que implementam as duas parcelas que aparecem a multiplicar por  $1/P$  na fórmula de Chua.

150

Pode agora ver-se como a duração varia com  $r$ . Uma simples tabela obtida com os comandos DATA TABLE 1 conduzirá ao gráfico da figura 42.

## 8.5 Cálculo do YTM com Períodos Irregulares

Um dos problemas encontrados frequentemente na análise da duração é o de calcular o ganho até à maturidade, YTM, quando os pagamentos futuros não se apresentam regularmente espaçados. Esta secção dá um exemplo e mostra depois um pequeno artifício em 123 que permite resolver o problema com facilidade.

151

Considere-se um activo que neste momento custa 100 dólares e que vai pagar 5 dólares dentro de 6/10 de um ano (319 dias); dentro de 1,6 anos paga outros cinco dólares; dentro de 2,6 anos e dentro de 3,6 continua a pagar o mesmo cupão. Por fim, dentro de 4,6 de um ano paga 105 dólares. Qual é o YTM desta obrigação? Aqui, o primeiro período tem um tamanho diferente dos outros.

"período" irregular	cash flow	cash-f ajustado	deslocamento 0.6 anos
0	-100	-97.8827	
1	5	5	
2	5	5	
3	5	5	
4	5	5	
5	105	105	
TIR	0.05496		
marcador	0		

Figura 43: Implementação em 123 do cálculo do YTM com um período irregular no início.

O que se pretende descobrir é um  $r$  que seja raiz da equação

$$-100 + \sum_{t=0}^3 \frac{5}{(1+r)^{t+0,6}} + \frac{105}{(1+r)^{4,6}} = 0$$

Tal como se apresenta, é difícil achar esta raiz com 123. Porém, dividindo ambos os membros por  $(1+r)^{0,4}$  obter-se-á:

$$0 = \frac{-100}{(1+r)^{0,4}} + \sum_{t=1}^4 \frac{5}{(1+r)^t} + \frac{105}{(1+r)^5}$$

Esta equação já se deixa resolver facilmente em 123, apesar de requerer um outro pequeno estratagema. Faça-se uma folha de cálculo como a da figura 43.

**152** O registo do TIR e o primeiro do cash-flow ajustado devem conter fórmulas simples. Na célula chamada IRR é usada a função @IRR do 123 para se calcular a taxa interna de rentabilidade da coluna dos cash-flows ajustados, sempre que o registo MARCADOR estiver a zero:

```
@IF(MARCADOR<>0,0,@IRR(0,CASH_AJUSTADO))
```

Na primeira linha dos cash-flows ajustados, chamada CASH AJUSTADO, calcula-se

```
+PAGAMENTO_INIC/(1+IRR)^(1-DESLOCAMENTO)
```

que, note-se, não é mais do que a parcela

$$\frac{-100}{(1+r)^{0,4}}$$

	sem iterar	1. iter.	. . .	resultado:
	cash-f	cash-f		cash-f
	ajustado	ajustado		ajustado
	-100	-98.0673	. . .	-97.8828
	5	5		5
	5	5		5
	5	5		5
	5	5		5
	105	105		105
TIR	0	0.05	. . .	0.054958
marcador	2	0		0

Figura 44: Implementação em 123 da estimação do YTM com um período irregular no início: Aspecto da folha de cálculo quando o marcador não está a zero e durante algumas das iterações.

da equação que se pretende resolver em ordem a  $r$ .

**153** O deslocamento é, neste caso, 6/10 de um ano. Para trabalhar com esta folha de cálculo deve primeiro colocar-se no marcador um valor diferente de zero. Isto assegura que as iterações seguintes não ficarão aprisionadas num loop de ERR. Depois, coloca-se o marcador a zero. De cada vez que se carregar na tecla de recalculiar (F9), o algoritmo produz uma iteração. Um poucas iterações são suficientes para atingir a convergência. Este processo é ilustrado pela figura 44.

O YTM foi portanto estimado em 5,49%. O algoritmo aqui descrito limitou-se a equilibrar uma das parcelas da equação com as restantes. De um lado, tem-se o registo IRR que tenta achar um  $r$  capaz de anular a equação

$$-\text{CASH AJUSTADO} + \sum_{t=1}^4 \frac{5}{(1+r)^t} + \frac{105}{(1+r)^5}.$$

Do outro, o registo CASH AJUSTADO que calcula, como vimos, a parcela correspondente ao investimento inicial. Ao iterar, o valor de @IRR é levado a assumir valores que tornem mínimo ou mesmo anulem a diferença entre ambas as parcelas. Este valor será  $r$ , a raiz pretendida da equação acima.

## 8.6 Estratégias de Imunização

O valor de uma carteira de obrigações está sujeito a reflectir a estrutura das taxas de juro que estiverem a ser praticadas. Se fosse possível conseguir que uma carteira tivesse numa data futura o mesmo valor que tem agora, qualquer que fosse a estrutura das taxas de juro praticadas, então essa carteira poderia servir para imunizar contra futuros pagamentos.

Esta secção discute estratégias de imunização, destinadas a atingir tal objectivo. A imunização é um conceito extraído do de duração. Existem tantos conceitos de imunização quantos os de duração, mas este capítulo apenas estuda o mais simples, o de Macauley (ver, para mais detalhes Weil (1973) [39]).

**154. Algumas fórmulas:** Considere-se a seguinte situação: uma empresa tem que satisfazer uma obrigação futura  $P$ . O valor descontado desta obrigação é

$$V_0 = \frac{P}{(1+r)^N}$$

onde  $r$  é uma taxa apropriada. Entretanto, a empresa é detentora de um activo,  $B$ , cujo valor,  $V_B$  é igual ao valor descontado da obrigação futura. Se o caudal de pagamentos previstos para  $B$  for  $P_1, \dots, P_M$ , o valor actual líquido desse bem será

$$V_B = \sum_{t=1}^M \frac{P_t}{(1+r)^t}$$

Agora suponha-se que  $r$  sofre uma mudança. Usando uma aproximação de primeira ordem é possível ver-se que o novo valor da obrigação futura viria dado por

$$V_0 + dV_0 = V_0 + \Delta r \left[ \frac{-N P}{(1+r)^{N+1}} \right]$$

Por outro lado, o novo valor do bem  $B$  seria dado, sob as mesmas hipóteses, por uma expressão do tipo

$$V_B + dV_B = V_B + \Delta r \left[ \sum_{t=1}^M \frac{-t P_t}{(1+r)^{t+1}} \right]$$

Se os dois valores acima fossem iguais, uma mudança em  $r$  não iria afectar as propriedades protectoras da carteira que contém os bens desta empresa. Obrigie-se portanto  $V_0 + dV_0$  a ser igual a  $V_B + dV_b$ . Isto produz a condição

$$V_0 + \Delta r \left[ \frac{-N P}{(1+r)^{N+1}} \right] = V_B + \Delta r \left[ \sum_{t=1}^M \frac{-t P_t}{(1+r)^{t+1}} \right]$$

que consiste, funcionalmente, em obrigar ao emparelhamento ou igualdade das mudanças em valor observadas em ambos os activos. Isto é, as primeiras derivadas de ambos os valores em causa ficam obrigadas a serem iguais. Recordando agora que

$$V_B = V_0 = \frac{P}{(1+r)^N}$$

é fácil ver que a igualdade acima conduz à condição

$$\frac{1}{V_B} \sum_{t=1}^M \frac{-tP_t}{(1+r)^t} = N \quad (42)$$

Note-se a semelhança desta equação com a definição de duração (39). O que se conclui daqui é que, quando a duração de um activo é igual ao número  $N$  de períodos até à data de cumprir a obrigação, e desde que se aceite uma aproximação de primeira ordem para as variações de  $r$ , o activo pode realmente garantir este pagamento futuro.

**155** Suponha-se que a estrutura das taxas de juro é uniforme: a taxa à qual os meios libertos no futuro vão ser descontados é a mesma, qualquer que seja o número de períodos que decorram entre o presente e as datas de maturidade. Nesse caso, uma condição necessária e suficiente para que a cotação no mercado do activo  $B$  seja igual — apesar das mudanças verificadas em  $r$  — à cotação no mercado de uma obrigação futura,  $P$ , é que *a duração do activo seja igual à duração da obrigação futura*. Aqui, entenda-se a palavra *igual* no sentido de uma aproximação de primeira ordem.

Pois bem, diz-se de uma obrigação com a qual o activo referido foi emparelhado desta forma, que está *imunizada*.

**156** O desenvolvimento apresentado acima tem duas limitações. A primeira é bastante crítica e a segunda parece ter menos importância. Ei-las:

1. O tipo de imunização discutido só é válido quando uma aproximação de primeira ordem for aceitável. No exemplo que se apresentará a seguir, ver-se-á que tal aproximação pode ser grosseira.
2. Assumiu-se também que a curva do ganho  $r$  era uniforme. Isto constitui uma aproximação pobre da realidade. Porém, curiosamente, essa aproximação não parece afectar muito a precisão da técnica explicada acima.

Teorias mais elaboradas, capazes de contemplar estruturas da taxa de juro não-uniformes, conduzem a definições alternativas de duração e de imunização (ver Bierwag *et al.* 1981

e 1983 [5], [6] e também Cox, Ingersoll e Ross 1979 [15]). Porém, num estudo empírico destas alternativas, Gulterkin & Rogalsky (1984) [17] mostraram que o conceito simples de duração aqui usado funciona tão bem, e possivelmente melhor, do que esses outros mais elaborados.

### 8.6.1 Um Exemplo

Está-se a tentar imunizar uma obrigação a satisfazer dentro de 10 anos e cujo valor actual é mil dólares. Neste momento a taxa de juro é de 6% e portanto a obrigação a satisfazer é no montante de 1790,85 dólares. Pretende-se conseguir a imunização comprando mil dólares em papéis obrigacionistas (*bonds*) ou combinações de *bonds*.

157 Consideram-se três possíveis candidatas: uma *bond* com 10 anos até à maturidade, com cupões que pagam 6,7% e valor facial de mil; uma outra com 15 anos até à maturidade, com o mesmo valor facial e cujos cupões pagam 6,988%; ou então uma terceira *bond* com 30 anos até à maturidade, o mesmo valor facial e cujos cupões pagam 5,9%.

À taxa de 6% as cotações destas três *bonds* diferem, de modo a apresentarem o mesmo YTM. Como a primeira delas custa 1051,52, basta comprar uma proporção de 0,951 do seu valor facial (951 dólares) para ter os mil dólares desta *bond*. O mesmo raciocínio aplicado às restantes *bonds* conduz ao quadro seguinte:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3
Cotacao hoje	1051.52	1095.96	986.24
proporcao	0.9510	0.9124	1.0140
Cupao	67	69.88	59
Duracao	7.66	10.00	14.63

Se a taxa de juro permanecer constante, é possível re-investir cada cupão e ganhar 6%. Passados 10 anos de reinvestimento dos cupões a *bond* 2 teria libertado

$$\sum_{t=0}^9 69,88 \times (1 + 0,06)^t + \left[ \sum_{t=1}^5 \frac{69,88}{(1 + 0,06)^t} + \frac{1000}{(1 + 0,06)^5} \right] = 921,07 + 1041,62 = 1962,69$$

A primeira parcela é o que se ganha com os cupões re-investidos. A segunda e terceira parcelas representam o valor da *bond* no ano 10, quando ela tem ainda cinco anos pela frente até atingir a maturidade. Como a proporção a comprar é apenas 0,912, ter-se-á, no fim destes dez anos, apenas  $0,912 \times 1962,69 = 1790,84$ . Assim, conseguiu-se o que

se procurava: ter, passados dez anos, a possibilidade de cumprir com uma obrigação no montante de 1790,85 (com um erro de arredondamento de 0,01 dólares).

158 Podem representar-se os resultados acima para as três bonds que se estão a estudar:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3
Duracao	7.66	10.00	14.63
Proporcao	0.951	0.912	1.014 fixas
Faltam	0	5	20 anos
Preco	1000.00	1041.62	988.53
Cupoes reinv	883.11	921.07	777.67
Lucro Total	1883.11	1962.69	1766.20
A satisfazer: Total * Prop	1790.85	1790.85	1790.85

Como se vê, as proporções de cada bond foram calculadas de modo a que qualquer delas imuniza a empresa contra a obrigação referida. Comprando agora mil dólares de qualquer delas ter-se-á, dentro de dez anos, a possibilidade de fazer face a uma obrigação no montante de 1790,85. Isto, *caso a taxa de juro, e portanto o YTM destas bonds, não varie*.

159 Suponha-se porém que, imediatamente depois da compra de mil dólares de uma destas bonds, a taxa de juro muda para um novo valor e permanece aí. Isso iria afectar os cálculos acima. Por exemplo, se a taxa cair para 5%, ter-se-á:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3
Duracao	7.66	10.00	14.63
Proporcao	0.951	0.912	1.014 fixas
Faltam	0	5	20 anos
Preco	1000.00	1086.07	1112.16
Cupoes reinv	842.72	878.94	742.10
Total	1842.72	1965.01	1854.26
A satisfazer: Total * Prop	1752.43	1792.97	1880.14

160 Note-se agora que as bonds 1 e 3 não cumprem com a sua obrigação. Porém, a capacidade da bond 2 para cobrir a obrigação quase não foi afectada por possíveis variações no seu YTM. A explicação para isso está no facto da duração desta bond coincidir com o tempo até à obrigação ter de ser cumprida e no que foi dito a propósito da fórmula (42) da secção precedente.



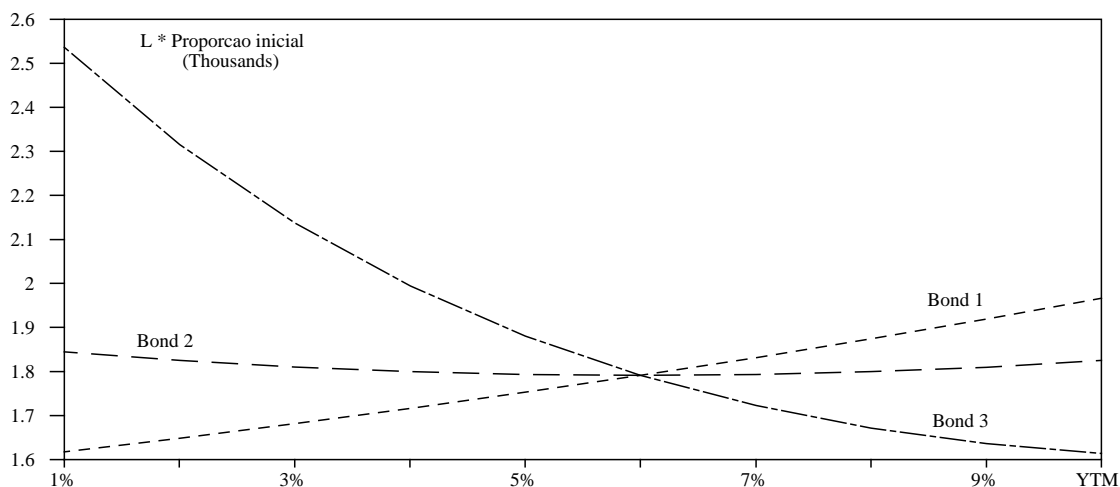


Figura 45: Variação do lucro total obtido com três bonds quando o YTM (eixo dos X) oscila em torno dos 6% iniciais. A bond 2 é a que assegura maior imunização.

Repetindo-se os cálculos acima para uma colecção de possíveis taxas de juro, os resultados seriam os que se podem ver sob forma gráfica na figura 45. Nota-se de novo que a capacidade da bond 2 para garantir o cumprimento da obrigação quase não é afectada por mudanças no seu ganho até à maturidade. Ora é esta a qualidade que se procura quando se fala de *imunizar*.

### 8.6.2 Imunização com Carteiras de Bonds

Existe uma maneira expedita de se conseguir um investimento em bonds com uma duração de 10. Consiste ela em criar carteiras de bonds cuja duração foi calculada de tal forma que a sua duração é a desejada. A duração de uma carteira de bonds é a média ponderada das durações dos seus componentes. Portanto, para se conseguir uma dada duração basta determinar quais as proporções que a ela conduzem e depois construir uma carteira com essas proporções.

161 No exemplo acima, quem investisse 655,091 dólares na bond 1 e mais 344,909 na 2, obteria uma carteira com a duração de 10. Os seguintes números são fáceis de obter:

	Bond 1	Bond 3	Carteira
Duracao	7.665	14.636	10
Proporcao	0.665	0.335	
A satisfazer: Total * Prop	1790.85	1790.85	1790.85

Aqui, o valor de 10 anos é um dado. As proporções de cada bond na carteira deduzem-se

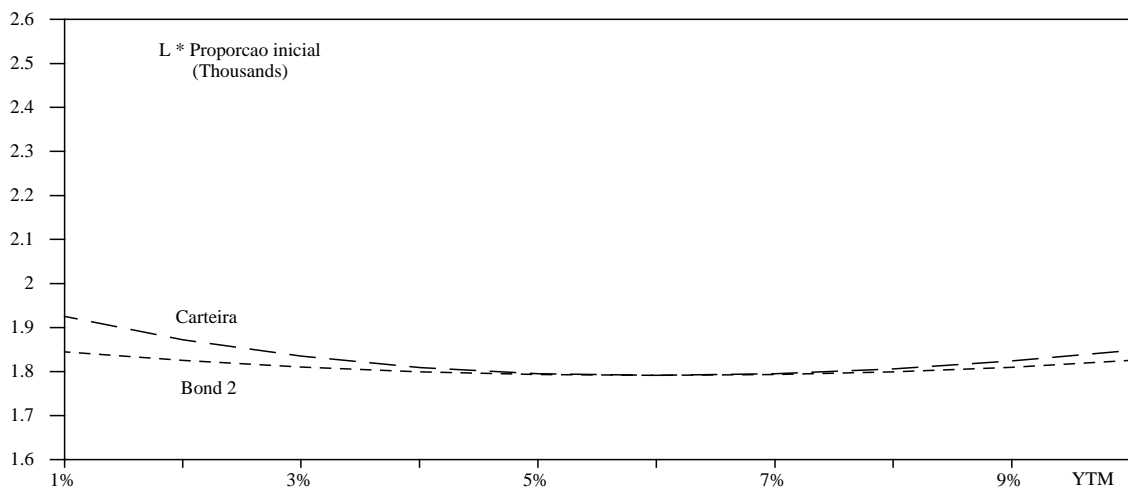


Figura 46: Variação do lucro total obtido com a bond 2 (a pontilhado) e com uma carteira com as bonds 1 e 2 (a tracejado) quando o YTM (eixo dos X) oscila em torno de 6%. A carteira assegura uma imunização mais convexa.

deste dado e da duração de cada uma. Depois, estas proporções usam-se para calcular o lucro da carteira.

Repetindo agora a análise da sensibilidade dos meios libertos pela carteira a oscilações em torno de uma taxa de 6%, pode obter-se uma tabela com o aspecto gráfico que a figura 46 ilustra.

**162. Interesse da convexidade:** Note-se que, na figura 46, a convexidade conseguida com a carteira de duas bonds é maior do que aquela que se obtém só com a bond 2. Isto é uma regra geral: A convexidade de uma carteira pode fazer-se maior do que a das bonds individuais.

Nem é preciso dizer que a convexidade é uma característica desejável em imunização, já que fornece uma protecção extra qualquer que seja a oscilação sofrida pelo YTM. Ao compararem-se duas carteiras de bonds, é preferível aquela que for mais convexa.

### 8.6.3 A Imunização de Segunda Ordem

Apesar do que foi dito sobre o interesse da convexidade, convém, em alguns casos, calcular as proporções que, numa carteira de bonds, a tornam tão insensíveis quanto possível a oscilações na estrutura temporal das taxas de juro. Uma maneira de melhorar esta característica de uma carteira consiste em, não apenas emparelhar as primeiras derivadas da mudança em valor com o tempo — o que, como se viu atrás, conduz ao conceito de duração

—, mas também emparelhar as segundas derivadas.

Uma extensão da análise feita na secção 8.6 levaria à conclusão de que o emparelhamento das segundas derivadas requer o cumprimento da condição

$$N(N + 1) = \frac{1}{V_B} \sum_{t=1}^M \frac{t(t + 1)P_t}{(1 + r)^t} \quad (43)$$

Esta nova condição é a que deveria agora funcionar — junto com a duração ou aproximação de primeira ordem — para calcular, nos exemplos anteriores ou outras aplicações práticas, as proporções de cada bond que, numa carteira, seriam capazes de conseguir uma imunização uniforme.

É fácil introduzir tal condição extra. Mostra-se a seguir uma folha de cálculo capaz de determinar quais as proporções de três bonds capazes de assegurarem tanto a imunização de primeira como a de segunda ordem. O problema a resolver é apenas descobrir qual a carteira (proporções) cuja primeira e segunda derivadas do seu valor actual iguala o da obrigação a satisfazer dentro de 10 anos.

```
Obrigacao a imunizar: Dentro de          10  anos
                       Valor actual e'    1000
                       Taxa de juro       6%
                       Portanto,         1790.85 e' seu o valor futuro.
```

Encontram-se disponíveis três bonds para resolver o problema e mais uma quarta para comparar desempenhos. Esta quarta bond é uma bond óptima para efeitos de imunização, quando se considera apenas a primeira derivada. Tal como no exercício anterior, ter-se-á:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3	Bond 4
Preco	827.95	767.63	1368.00	1095.96
Proporcao	1.21	1.30	0.73	0.91
YTM	0.06	0.06	0.06	0.06
Maturidade	20	14	10	15
Cupao	45	35	110	69.88
Valor Facial	1000	1000	1000	1000

Calculo da duracao pela formula de Chua:

parcela 1	4441.51	2135.27	4065.86	4700.60
parcela 2	6236.09	6192.21	5583.94	6258.97

Desta vez o problema de determinar as três proporções requer a resolução simultânea de um sistema de três equações a três incógnitas. As incógnitas são, naturalmente, as proporções; quanto às equações, as duas primeiras são as que igualam as primeiras e segundas derivada ao número de anos (neste caso 10) e a  $10 \times (10 + 1)$  respectivamente. A terceira equação é a que estabelece que a soma das três proporções a obter seja igual à unidade.

Ficará portanto:

	Matriz a inverter (A):					
duracao	12.8964	10.8483	7.053934			
segunda derivada	229.087	148.702	67.59801			
props somam 1		1	1	1		
	Matriz inversa (A <sup>-1</sup> ):				Y:	A <sup>-1</sup> * Y:
X = A <sup>-1</sup> * Y	-0.5838	0.02731	2.272031	10	-56.19%	Prop. Bond 1
	1.16254	-0.0420	-5.35738	110	164.15%	Prop. Bond 2
	-0.5786	0.01474	4.085349	1	-7.97%	Prop. Bond 3

O resultado é pois a coleção de proporções acima. Como já se viu, proporções negativas indicam *short sale*. No final dos dez anos, e a manter-se uma taxa de juro de 6%, ter-se-á:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3	Bond 4	
Preco da bond	889.598	913.372	1000	1041.61	
Cupoes re-investidos	593.135	461.327	1449.887	921.073	
TOTAL	1482.73	1374.70	2449.887	1962.69	Carteira:
total * proporcao	1790.84	1790.84	1790.847	1790.84	1790.84

163 Uma simples análise de sensibilidade mostra o efeito deste tipo de imunização de ordem elevada. O gráfico da figura 47 compara a variação dos meios libertos totais obtida com a bond 4 com o da carteira de três bonds quando o YTM oscila em torno de 6%. A carteira assegura uma imunização mais aproximada, embora menos convexa.

## 8.7 Exercícios

164. Qual o efeito, na duração de uma bond, de um aumento no que um cupão paga? Supõe que o *yield to maturity* da bond não mudou.

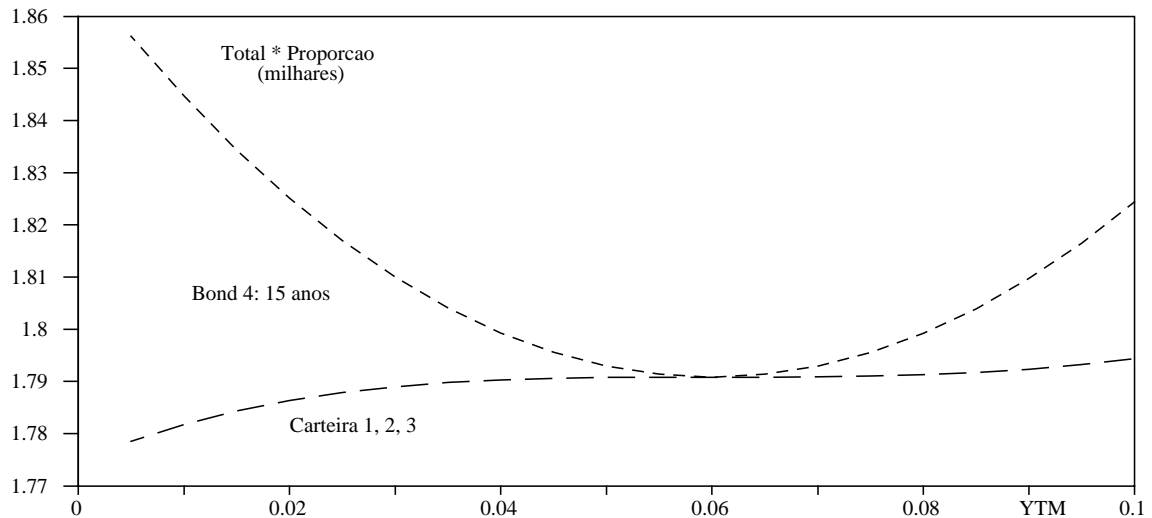


Figura 47: Imunização com aproximação até à segunda derivada. Lucro obtido com bond 4 (pontado); carteira de bonds (tracejado).

**165.** “A duração pode ser vista como uma medida do risco de uma bond. Quando tudo o resto é igual, quanto maior o risco, menor a sua duração”. Verificar esta afirmação por meio de um exemplo concreto. Qual é a lógica económica que suporta tal afirmação?

**166.** Uma *pure discount bond* é a que apenas paga o reembolso do investimento e os juros, tudo na mesma altura. Qual seria a duração de uma tal bond?

**167.** No dia 23 de Janeiro de 1987 a cotação de uma West Jefferson Development Bond era 1.122,32 dólares. Esta bond paga 59 dólares cada 1 de Março e de Outubro até 1993. No dia 1 de Outubro de 1993 a bond é resgatada ao valor facial de mil dólares. Calcular o ganho até à maturidade, YTM, desta bond e depois a sua duração.

**168.** Uma sequência de bonds  $i, i = 1, 2, 3, \dots$  têm todas a mesma maturidade  $N$ , o mesmo  $TYM = r$ , mas cada uma tem um diferente cupão  $C_i$ . Mostrar, usando a fórmula de Babcock, que a duração destas bonds pode escrever-se  $D_i = N - KC_i$  onde  $K = N - (1 - r) PV$ . Usar o 123 para produzir um gráfico da variação de  $D_i$  com diversos  $C_i$ .

# Bibliografia

- [1] J. Aitchison and J. Brown. *The Lognormal Distribution*. Cambridge University Press, 1957.
- [2] G. Babcock. Duration as a weighted average of two factors. *Financial Analysts Journal*, pages 75–76, March-April 1985.
- [3] W. Baumol. *Economic Theory and Operations Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Clifs, N.J., U.S., 1972.
- [4] S. Benninga. *Numerical Techniques in Finance*. The MIT Press, Cambridge, Mass. U.S., 1989.
- [5] G. Bierwag and *alt.* The art of risk management in bond portfolios. *Journal of Portfolio Management*, pages 27–36, Spring 1981.
- [6] G. Bierwag and *alt.* Duration: Its development and use in bond portfolio management. *Financial Analysts Journal*, pages 15–35, July-August 1983.
- [7] F. Black. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45:444–455, Jul 1972.
- [8] F. Black. Facts and fantasy in the use of options. *Financial Analysts Journal*, 31:36–41, 61–72, July - August 1975.
- [9] F. Black and M. Scholes. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance*, 27:399–417, May 1972.
- [10] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:673–659, May 1973.

- [11] R. Butler, R. Turner, P. Coates, R. Pike, and D. Price. Investing in new technologies for competitive advantage. *European Management Journal*, 11(3):367–376, September 1993.
- [12] J. Chua. A closed form formula for calculating bond duration. *Financial Analysts Journal*, pages 76–78, May-June 1984.
- [13] T. Copeland and J. Weston. A note on the evaluation of cancelable operating leases. *Financial Management*, pages 68–72, summer 1982.
- [14] T. Copeland and J. Weston. *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison-Wesley Publishing Co., second edition, 1983.
- [15] J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. Duration and the measurement of bond risk. *Journal of Business*, pages 51–61, January 1979.
- [16] E. Elton and M. Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, second edition, 1984.
- [17] B. Gultekin and J. Rogalski. Alternative duration specifications and the measurement of basis risk: Empirical tests. *Journal of Business*, pages 241–264, April 1984.
- [18] F. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw Hill, New York, 1974.
- [19] R. Jarrow and A. Rudd. *Option Pricing*. Irwin, Homewood, Ill., 1983.
- [20] T. Jelassi. Gaining business from information technology: The case of otis elevator, france. *European Management Journal*, 11(1):62–73, March 1993.
- [21] D. Knuth. *The Art of Computer Programming, volume 2: Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Mass., second edition, 1981.
- [22] H. Levy and M. Sarnat. On leasing, borrowing and financial risk. *Financial Management*, winter 1979.
- [23] H. Levy and M. Sarnat. *Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.
- [24] S. Manaster and G. Koelher. A note on the calculation of implied variances from the black-scholes method. *Journal of Finance*, 37:227–230, March 1982.

- [25] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, March 1952.
- [26] J. McConnell and Schallheim S. Valuation of asset leasing contracts. *Journal of Financial Economics*, 12:237–261, August 1963.
- [27] M. Miller and M. Scholes. Rates of return in relation to risk: A re-examination of some recent facts. In M. Jensen, editor, *Studies in the Theory of Capital Markets*. Praeger, New York, 1972.
- [28] S. Myers and G. Pogue. A programming approach to corporate financial management. *Journal of Finance*, 29:579–599, May 1974.
- [29] J. Nelson and S. Schaefer. The dynamics of the term structure and alternative portfolio immunization strategies. In G. Kaufman, G. Byerwag, and A. Toevs, editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*. JAI, Greenwich, Conn., 1983.
- [30] A. Ofer. The evaluation of leases versus purchase alternatives. *Financial Management*, pages 67–74, summer 1976.
- [31] Brealey R. and Myers S. *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill Book Co., fourth edition, 1981.
- [32] R. Roll. A critique of the asset pricing theory's test; part 1: On past and potential testability of the theory. *The Journal of Financial Economics*, 4:129–176, March 1977.
- [33] R. Roll. Ambiguity when performance is measured by the securities market line. *The Journal of Finance*, 33:1051–1069, September 1978.
- [34] M. Schlosser. *Corporate Finance: A Model Building Approach*. Prentice Hall, New York, 1989.
- [35] H. Simon. *Administrative Behaviour*. The Free Press (NY), 1945.
- [36] H. Simon. *The New Science of Management Decisions*. Harper and Row (NY), 1984.
- [37] N. Venkatraman, J. Henderson, and S. Oldach. Continuous strategic alignment: Exploiting information technology capabilities for competitive success. *European Management Journal*, 11(2):139–149, June 1993.



- [38] J. Warren and J. Shelton. A simultaneous equation approach to financial planning. *Journal of Finance*, 26:1123–1142, December 1971.
- [39] R. Weil. Macauley's duration: An appreciation. *Journal of Business*, pages 589–592, October 1973.