

# A Fronteira Eficiente

Universidade do Algarve, Faculdade de Economia  
Mestrado em Finanças

O estudo do investimento baseado em carteiras de títulos teve o seu primeiro avanço significativo em 1952 com Henry Markowitz [3]. A intuição básica de Markowitz é de que as características particulares de cada um dos títulos contribuem pouco para o aumento da riqueza de um investidor. Importam mais as características de todo um conjunto de activos organizados em *carteiras* e onde cada um deles existe numa dada proporção.

Este texto ensina a manipular títulos (activos) cotados em mercados de capitais com vista à constituição de carteiras e optimização dos seus ganhos. Tais activos podem ser acções, obrigações, bens imobiliários ou quaisquer outros, embora os exemplos aqui dados se refiram apenas a acções.

# Índice

	ii
<b>1 Cotações e Ganhos</b>	<b>1</b>
1.1 Cálculo dos Ganhos . . . . .	1
1.2 Valor Esperado e Variância de uma Carteira com Dois Títulos . . . . .	4
<b>2 Mais de Dois Títulos</b>	<b>7</b>
2.1 Ganhos Esperados e Variâncias . . . . .	7
2.2 A Carteira Eficiente . . . . .	8
2.3 O Cálculo de uma Matriz de Variância-Covariância . . . . .	11
2.4 O Cálculo de Carteiras Eficientes . . . . .	11
2.5 Exercício . . . . .	13

# Capítulo 1

## Cotações e Ganhos

Considere-se um conjunto  $1, \dots, j, \dots, N$  de activos cujo valor futuro é incerto. Os investidores estarão interessados em conhecer os ganhos que podem esperar com a sua compra,  $E(R_j)$ , as variâncias desses ganhos,  $\text{VAR}(R_j)$  e as covariâncias entre eles,  $\text{COV}(R_j, R_i)$  (é frequente encontrar-se a notação  $\sigma_j^2$  para a variância e  $\sigma_{ji}$  para a covariância). O interesse em considerar ganhos em vez de cotações vem do óbvio significado económico que os últimos têm.

O exemplo que se segue descreve duas cotações mensais, as do *activo A* e do *activo B*, ao longo de um ano (ver a figura 1). As listas que se mostram do lado esquerdo da figura dão a cotação à hora do fecho da Bolsa no último dia em que houve transações em cada mês. O período zero—o primeiro da lista—mostra a cotação à partida ou inicial de cada activo. Pretende-se calcular as características estatísticas destas duas séries.

### 1.1 Cálculo dos Ganhos

O primeiro a fazer é transformar cotações em ganhos (*return*) mensais. Um ganho mensal é o ganho percentual que auferiria um investidor que comprasse um activo no fim do mês  $t - 1$  e depois o vendesse no fim do mês seguinte, o  $t$ . Dado um mês  $t$  e um activo chamado activo  $A$ , o ganho mensal  $R_t^A$  seria

$$R_t^A = \frac{\text{Dividendos}_t + \text{Cotação}_t - \text{Cotação}_{t-1}}{\text{Cotação}_{t-1}} \quad (1)$$

No nosso exemplo ignora-se a possibilidade de serem distribuídos dividendos.

Aplicando a fórmula acima, os ganhos mensais em percentagem seriam facilmente calculados e dariam

activo A

activo B

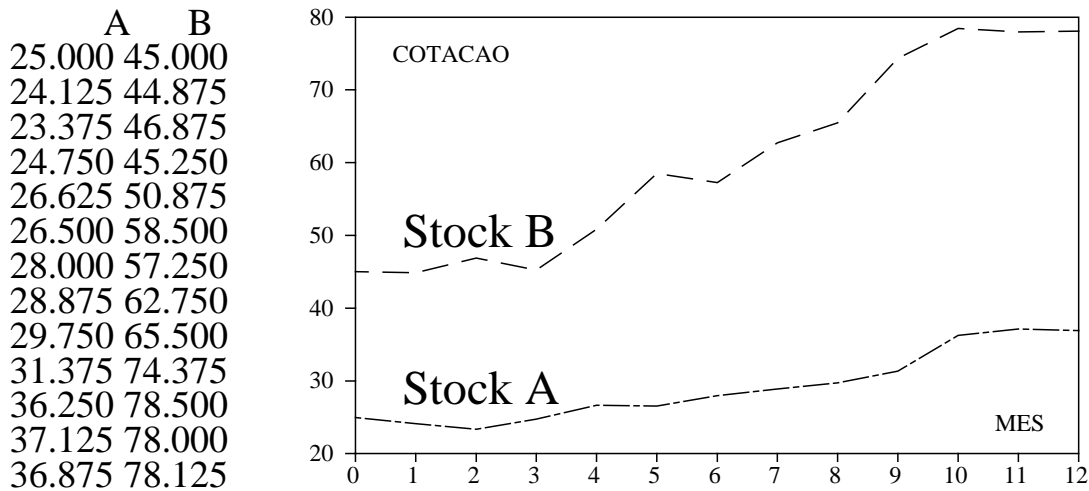


Figura 1: Evolução, ao longo de um ano, das cotações mensais de dois activos cotados, A e B.

mes	cotacao	ganho	cotacao	ganho
0	25		45	
1	24.125	-3.500%	44.875	-0.278%
2	23.375	-3.109%	46.875	4.457%
3	24.75	5.882%	45.25	-3.467%
4	26.625	7.576%	50.875	12.431%
5	26.5	-0.469%	58.5	14.988%
6	28	5.660%	57.25	-2.137%
7	28.875	3.125%	62.75	9.607%
8	29.75	3.030%	65.5	4.382%
9	31.375	5.462%	74.375	13.550%
10	36.25	15.538%	78.5	5.546%
11	37.125	2.414%	78	-0.637%
12	36.875	-0.673%	78.125	0.160%

**1. Validade do raciocínio:** Vai-se agora fazer uma suposição arrojada, a de que o comportamento estatístico destas séries se mantêm inalterado ao longo do tempo. Assim, as características dos ganhos no futuro — os seus valores esperados, as suas variâncias e covariâncias — podem ser estimadas, isto é, podem deduzir-se calculando essas características tais como foram observadas no passado. Em geral, esta suposição é verificada aproximadamente na prática, desde que os períodos considerados não sejam longos. Porém, dão-se casos em que as características estatísticas de activos cotados na Bolsa se modificam bruscamente. Foi o caso das cotações de companhias petrolíferas em 1973 ou de companhias de transporte aéreo dos Estados Unidos quando, em 1978, caíram as barreiras proteccionistas do

governo [2].

Se a suposição acima é considerada aceitável, a média,  $\mu_R$  dos ganhos no passado pode considerar-se como um bom estimador do *valor esperado*,  $E(R)$ , desses ganhos no futuro. Usando as funções estatísticas existentes em qualquer folha de cálculo é fácil de ver que, para os activos A e B, esses valores esperados e variâncias seriam:

activo A		activo B	
Valor esperado	Variância	Valor esperado	Variância
3.4133%	0.002525	4.8835%	0.003798

**2. Cálculo de Covariâncias:** Pretende-se agora saber qual será a *covariância* — a variação conjunta — dos ganhos. Tal como o coeficiente de correlação, a covariância mede o grau em que dois ganhos,  $A$  e  $B$ , variam em uníssono. O coeficiente de correlação é uma covariância estandardizada. A covariância calcula-se aplicando a fórmula

$$\text{COV}(R_{At}, R_{Bt}) = \frac{1}{M} \sum [R_{At} - E(R_{At})] \times [R_{Bt} - E(R_{Bt})] \quad (2)$$

em que  $M$  é o número de casos (no nosso caso  $M = 12$ ). Notar que a variância é a covariância de um ganho consigo próprio. É fácil achar a covariância:

mes	activo A		activo B		R(A)-E(A)	R(B)-E(B)	produto
	cotacao	ganho	cotacao	ganho			
0	25		45				
1	24.125	-3.500%	44.875	-0.278%	-0.0691	-0.0516	0.0036
2	23.375	-3.109%	46.875	4.457%	-0.0652	-0.0043	0.0003
3	24.75	5.882%	45.25	-3.467%	0.0247	-0.0835	-0.0021
4	26.625	7.576%	50.875	12.431%	0.0416	0.0755	0.0031
5	26.5	-0.469%	58.5	14.988%	-0.0388	0.1010	-0.0039
6	28	5.660%	57.25	-2.137%	0.0225	-0.0702	-0.0016
7	28.875	3.125%	62.75	9.607%	-0.0029	0.0472	-0.0001
8	29.75	3.030%	65.5	4.382%	-0.0038	-0.0050	0.0000
9	31.375	5.462%	74.375	13.550%	0.0205	0.0867	0.0018
10	36.25	15.538%	78.5	5.546%	0.1213	0.0066	0.0008
11	37.125	2.414%	78	-0.637%	-0.0100	-0.0552	0.0006
12	36.875	-0.673%	78.125	0.160%	-0.0408	-0.0472	0.0019

A covariância é a média da coluna “produto” e vale 0,000364. Este número, ao contrário do coeficiente de correlação, não é de interpretação directa. O seu valor depende da escala e unidades usadas.

**3. Correlação:** O coeficiente de correlação,  $\rho$ , pode obter-se por estandardização da covariância:

$$\rho_{AB} = \frac{\text{COV}(A, B)}{\sqrt{\text{VAR}(A) \times \text{VAR}(B)}} \quad (3)$$

Neste caso o valor de  $\rho_{AB}$  é 0,1. O coeficiente de correlação mede o grau, expresso sob a forma de um rácio, de co-variação existente entre dois ganhos. Varia sempre entre +1 e -1. Estes valores extremos indicariam uma relação linear: Um ganho seria uma réplica aumentada ou diminuída do outro. Uma correlação de zero, pelo contrário, indicaria ausência de co-variação. A independência de dois fenómenos estatísticos gera coeficientes de correlação nulos. Porém, note-se que o inverso não é verdadeiro: Podem existir casos em que se obtém um coeficiente de correlação nulo sem que os fenómenos sejam independentes.

4 Note-se também que, caso se desejasse escrever a covariância em percentagem — como se fez para os ganhos — ter-se-ia que escrever 3,64% o que é dez mil vezes o número obtido e não cem vezes.

## 1.2 Valor Esperado e Variância de uma Carteira com Dois Títulos

Vai-se agora supôr que existe uma carteira com metade dos títulos do activo A e a outra metade do activo B. Qual será a média do ganho — ou o ganho esperado — dessa carteira? E qual será a sua variância ou *risco*? Fazendo o cálculo ponderado, obtêm-se os seguintes ganhos mensais para a referida carteira:

mes	A	B	carteira	
1	-3.500%	-0.278%	-1.889%	0.5 proporcao de A
2	-3.109%	4.457%	0.674%	
3	5.882%	-3.467%	1.208%	
4	7.576%	12.431%	10.003%	
5	-0.469%	14.988%	7.259%	
6	5.660%	-2.137%	1.762%	
7	3.125%	9.607%	6.366%	
8	3.030%	4.382%	3.706%	
9	5.462%	13.550%	9.506%	
10	15.538%	5.546%	10.542%	
11	2.414%	-0.637%	0.888%	
12	-0.673%	0.160%	-0.257%	

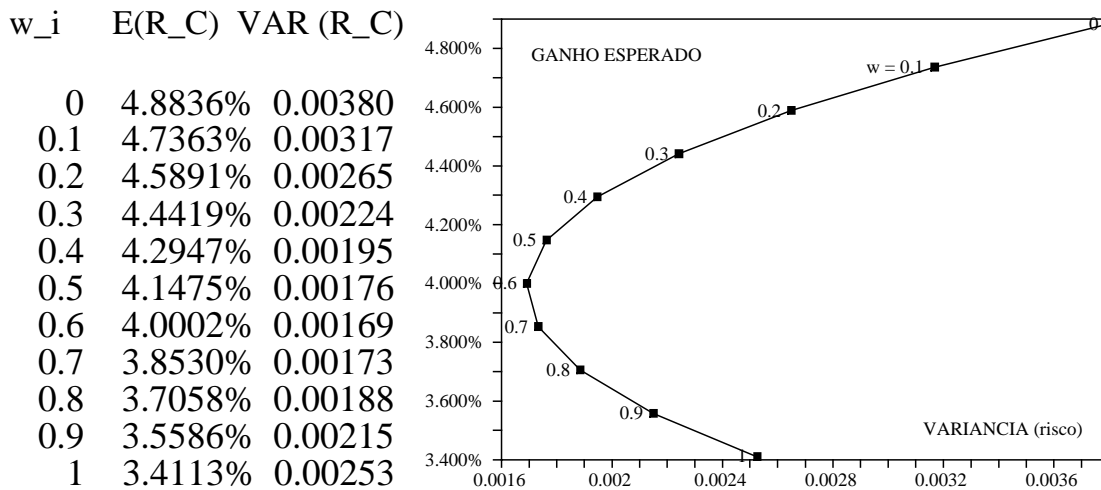


Figura 2: Os ganhos esperados e os riscos para diversas proporções de dois activos numa carteira onde existem apenas dois títulos.

3.411%    4.884%    4.147%    sao os ganhos esperados  
0.00253    0.00380    0.00176    sao as variancias (risco)

É facil de ver que a média ou ganho esperado da carteira é igual à média ponderada dos ganhos esperados em cada activo. Isto é uma regra geral: O ganho esperado de uma carteira é a média ponderada dos ganhos esperados dos seus componentes. Os factores de ponderação são as proporções de cada activo dentro da carteira:

$$E(R_P) = \sum E(R_i) \times w_i \tag{4}$$

No nosso caso — apenas dois activos — seria:

$$E(R_P) = E(R_A) \times w_A + E(R_B) \times (1 - w_A)$$

A variância ou incerteza de uma carteira é um pouco mais complicada de obter. O seu valor depende fortemente do grau de co-variabilidade existente entre os activos que a compõem. No caso de apenas dois activos, A e B, com um coeficiente de correlação de  $\rho_{AB}$  ela seria:

$$\text{VAR} (R_P) = \text{VAR} (R_A) \times w_A^2 + \text{VAR} (R_B) \times (1 - w_A)^2 + 2 \times w_A \times (1 - w_A) \times \text{COV} (R_A, R_B)$$

Mais adiante se introduzirão as fórmulas respeitantes ao caso geral.

**5** Lembremos ainda que a informação foi definida como uma redução na incerteza. Claramente, se um investidor conseguir, através de uma diversificação apropriada, reduzir a variância da sua carteira, estará a reduzir a incerteza e portanto terá obtido um ganho em informação.

**6** É frequente que se pretenda saber quais os valores esperados e a incerteza associada a uma carteira para diversas possíveis proporções,  $w_i$ , dos activos que a compõem. Vai-se



fazer isso com o exemplo que se tem vindo a usar. É fácil obter uma tabela como a da figura 2. Observe-se, do lado direito da mesma figura, o gráfico da variação dos ganhos esperados com a variância para estas diversas proporções. Cada investidor escolheria, de entre as possíveis proporções, aquela que melhor se ajustasse às suas preferências, i.e., ao desejado compromisso entre o risco e o ganho esperado.

# Capítulo 2

## Mais de Dois Títulos

No caso de  $N$  activos, vai-se supôr que a proporção do activo  $i$  na carteira é  $w_i$ . Usar-se-à notação matricial. Os  $w_i$  formam um vector-coluna a que se chamará  $\Theta$ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

Em certos casos pode ser conveniente escrever-se este vector como uma linha:

$$\Theta^T = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_N]$$

$\Theta^T$  é o transposto de  $\Theta$ .

### 2.1 Ganhos Esperados e Variâncias

O ganho esperado para uma carteira cujas proporções de diferentes activos são as dadas por  $\Theta$  é a média ponderada dos ganhos esperados de cada activo. Assim,

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^N E(R_i) \times w_i$$

Esta mesma expressão tem, em notação matricial, o seguinte aspecto:

$$E(R_P) = E(R)^T \Theta = \Theta^T E(R)$$

Quanto à variância da carteira com mais de dois títulos, ela vem dada pela expressão

$$\text{VAR}(R_P) = \sum_{i=1}^N \text{VAR}(R_i) \times w_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \text{COV}(R_i, R_j) \times (2w_i w_j)$$

A variância de cada activo aparece nesta fórmula a multiplicar pelo quadrado da sua proporção na carteira. A covariância de cada par de activos diferentes aparece também uma vez, a multiplicar pelo dobro do produto da sua proporção na carteira.

7 Todo o tratamento matemático das fórmulas acima se simplifica ao usar-se uma notação matricial. definindo a *matriz de variância e covariância*,  $S$ , como sendo a matriz que contém as variâncias em diagonal e as covariâncias nas outras células da seguinte forma:

$$S = \begin{bmatrix} \text{VAR}(R_1) & \text{COV}(R_{1,2}) & \text{COV}(R_{1,3}) & \cdots & \text{COV}(R_{1,N}) \\ \text{COV}(R_{2,1}) & \text{VAR}(R_2) & \text{COV}(R_{2,3}) & \cdots & \text{COV}(R_{2,N}) \\ \text{COV}(R_{3,1}) & \text{COV}(R_{3,2}) & \text{VAR}(R_3) & \cdots & \text{COV}(R_{3,N}) \\ \vdots & & & & \\ \text{COV}(R_{N,1}) & \text{COV}(R_{N,2}) & \text{COV}(R_{N,3}) & \cdots & \text{VAR}(R_N) \end{bmatrix}$$

a variância de uma carteira vem dada pela expressão (conhecida como *forma quadrática*)

$$\text{VAR}(R_P) = \Theta^T S \Theta \quad (5)$$

que corresponde à expressão acima mas é mais fácil de implementar. As fórmulas matriciais podem ser resolvidas com facilidade em algumas folhas de cálculo que dispõem de comandos para multiplicar, inverter e transpor matrizes.

8 Quando o número de observações é pequeno, pode obter-se directamente a matriz de variância e covariância a partir da matriz  $R_{n \times p}$  dos ganhos ( $n$ , número de observações;  $p$ , número de títulos) usando a fórmula

$$S = 1/n R^T R - E E^T \quad (6)$$

onde  $E_{p \times 1}$  é o vector dos valores esperados.

## 2.2 A Carteira Eficiente

Uma carteira eficiente é aquela que apresenta o menor risco de entre todas as carteiras com um dado ganho esperado. Pode também definir-se a carteira eficiente como a que tem o maior ganho esperado de entre todas as que têm o mesmo risco. A *fronteira eficiente* é o conjunto de todas as possíveis carteiras eficientes. De facto, para uma dada colecção de activos, existe um número infinito de proporções capazes de originar uma carteira eficiente. Essas diferentes proporções definem a fronteira eficiente.

Um investidor terá obviamente todo o interesse em que a sua carteira se situe na fronteira eficiente. Isso significa que a incerteza a que se expõe é a mínima possível para um dado

ganho esperado. Nesta secção apresentar-se-á o suporte analítico necessário à determinação de carteiras eficientes e da respectiva fronteira. Nas secções seguintes dar-se-á um exemplo de implementação.

9 Sob o ponto de vista analítico, o problema de encontrar a fronteira eficiente de um dado conjunto de activos resume-se a um caso simples de optimização linear. Dado um ganho esperado  $E(R_P)$ , a carteira eficiente será a que obedecer a

$$\min \sum_i \sum_j \text{COV} (R_{ij}) \times w_{ij} = \text{VAR} (R_P)$$

sujeito a

$$\sum_i R_P \times w_i = E(R_P) \quad \text{e a} \quad \sum_i w_i = 1$$

Black (1972) [1] mostrou que a fronteira eficiente é o *locus* de todas as combinações convexas de duas carteiras que sejam eficientes. Isto significa que, se as duas colecções de proporções

$$\Theta^1 = [w_1^1, w_2^1, w_3^1, \dots, w_N^1] \quad \text{e a} \quad \Theta^2 = [w_1^2, w_2^2, w_3^2, \dots, w_N^2]$$

forem eficientes, também o será qualquer combinação destas colecções. Assim, tomando uma proporção  $\omega$  da primeira e  $(1 - \omega)$  da segunda e construindo dessa forma uma nova carteira, ter-se-ia:

$$\Theta^1 \omega + \Theta^2 (1 - \omega) = [w_1^1 \omega + w_1^2 (1 - \omega), w_2^1 \omega + w_2^2 (1 - \omega), \dots, w_N^1 \omega + w_N^2 (1 - \omega)].$$

Uma forma simples de determinar a fronteira eficiente consiste portanto em achar duas carteiras que o sejam e depois combiná-las em proporções variáveis,  $\omega$ . Cada  $\omega$  determina um ponto da fronteira eficiente. É este o processo que se usará no exemplo a apresentar.

**10. O método:** Suponha-se que são conhecidos os ganhos esperados,  $E(R_i), i = 1, N$ , e as variâncias-covariâncias desses ganhos,  $\text{COV} (R_{ij}), i, j = 1, N$ . Uma forma expedita de achar uma de entre as possíveis carteiras eficientes seria a resolução simultânea do seguinte sistema de equações em  $z$ :

$$E(R_i) - C = \sum_j \text{COV} (R_{ij}) \times z_j, \quad i = 1, N$$

onde  $C$  é um número positivo qualquer. Obtém-se assim um conjunto de valores para  $z$ , os quais, depois de normalizados, dão as proporções de uma de entre as possíveis carteiras eficientes. O método acima vem descrito em Elton & Gruber (1984) [2].

11 Depois de resolvido o sistema de equações, podem achar-se os  $w_i$  tais que

$$w_i = \frac{z_i}{\sum_j z_j} \tag{7}$$

Estes  $w_i$  são as proporções de cada activo que correspondem a uma de entre as possíveis carteiras eficientes.

**12. Matrizes:** O sistema resolvido acima pode escrever-se em notação matricial:

$$R - C = SZ$$

onde  $S$  é a matriz de variância-covariância,  $Z$  é um vector de incógnitas e  $R$  é o vector dos ganhos esperados de cada activo. Para resolver este sistema, multiplicam-se ambos os lados por  $S$ , ficando

$$Z = S^{-1}[R - C] \quad (8)$$

Se este sistema fôr resolvido duas vezes com dois valores diferentes de  $C$ , obtêm-se duas carteiras eficientes. Chamemos-lhes  $\Theta^1$  e  $\Theta^2$ . Para se obterem mais pontos que estejam também sobre a fronteira eficiente, é preciso determinar a covariância entre  $\Theta^1$  e  $\Theta^2$ .

Assumindo que  $\Theta^1$  e  $\Theta^2$  são vectores-coluna, a covariância seria dada por uma generalização da fórmula (5):

$$\text{COV}(\Theta^1, \Theta^2) = \Theta^{1T} S \Theta^2 \quad (9)$$

onde  $\Theta^{1T}$  é o transposto de  $\Theta^1$ . Uma vez achada esta covariância, o lugar geométrico de todas as possíveis carteiras eficientes virá dado por

$$\omega \Theta^1 + (1 - \omega) \Theta^2$$

para qualquer  $\omega$ . Sendo  $R^1$  e  $R^2$  os vectores que contêm os ganhos esperados dos componentes das carteiras eficientes 1 e 2, ter-se-ia:

$$R^1 = \Theta^{1T} E(R) \quad \text{e também} \quad R^2 = \Theta^{2T} E(R) \quad (10)$$

Recorde-se por fim que o ganho esperado e a variância de qualquer carteira composta de duas carteiras eficientes na proporção de  $\omega$  e  $1 - \omega$  vêm dados por

$$E(R^P) = \omega R^1 + (1 - \omega) R^2, \quad (11)$$

$$\text{VAR}(R^P) = \omega^2 \text{VAR}(R^1) + (1 - \omega)^2 \text{VAR}(R^2) + 2\omega(1 - \omega) \text{COV}(R^1, R^2) \quad (12)$$

Uma vez que folhas de cálculo como a 123 podem manipular matrizes, o formalismo desenvolvido acima está dentro das suas possibilidades. Nas próximas secções discutir-se-á uma implementação de tal formalismo.

```

                                Ganhos anuais com activos

data      1      2      3      4      5      6      7
1974 -0.0118  -0.08  -0.2877 -0.3909  0.1671  0.0128 -0.0943
      -0.0302 -0.0282  0.1014  0.0834  0.1887  0      0.069
      -0.1923 -0.0772 -0.2041 -0.3175 -0.3135 -0.1528 -0.3472
      .
      .
      .
1988  0.0578  -0.0386 -0.0921 -0.0442 -0.0432 -0.041 -0.0233
      -0.0321  0.0462 -0.0357 -0.006  -0.037  0.0159 -0.049

variance-covariance matrix:
      1      2  ...      7
      1 0.008166 0.003999      0.004174
      2 0.003999 0.010119      0.003979
      3 0.006154 0.006832      0.007526
      4 0.004010 0.005525  ...  0.004438

```

Figura 3: Determinação de  $S$ : Uma possível disposição dos domínios dentro da folha de cálculo. Neste caso, existem sete activos

## 2.3 O Cálculo de uma Matriz de Variância-Covariância

O ponto de partida para a determinação da fronteira eficiente é o cálculo de  $S$ , a matriz de variância-covariância de uma colecção de ganhos obtidos com activos. Já se viu como proceder no caso de um número não muito elevado de observações.

A figura 3 na página 11 ilustra uma possível disposição dos diversos domínios dentro de uma folha de cálculo que executa tal tarefa.

## 2.4 O Cálculo de Carteiras Eficientes

De posse de  $S$ , a matriz de variância-covariância, e conhecendo-se os ganhos esperados de cada activo, é possível a determinação de colecções  $\Theta$  de proporções de cada activo capazes de tornar eficiente tal carteira. Este assunto foi abordado analiticamente na secção 2.2.

**13. Tabela da Fronteira Eficiente:** A partir dos valores esperados, variâncias e covariância das duas carteiras eficientes, é possível construir uma tabela com diversas combinações de ambas e obter assim a fronteira eficiente. A figura 4 (página 12) mostra, para 16 activos cotados na Bolsa de Nova York (cotações mensais entre Janeiro de 1976 e Dezembro

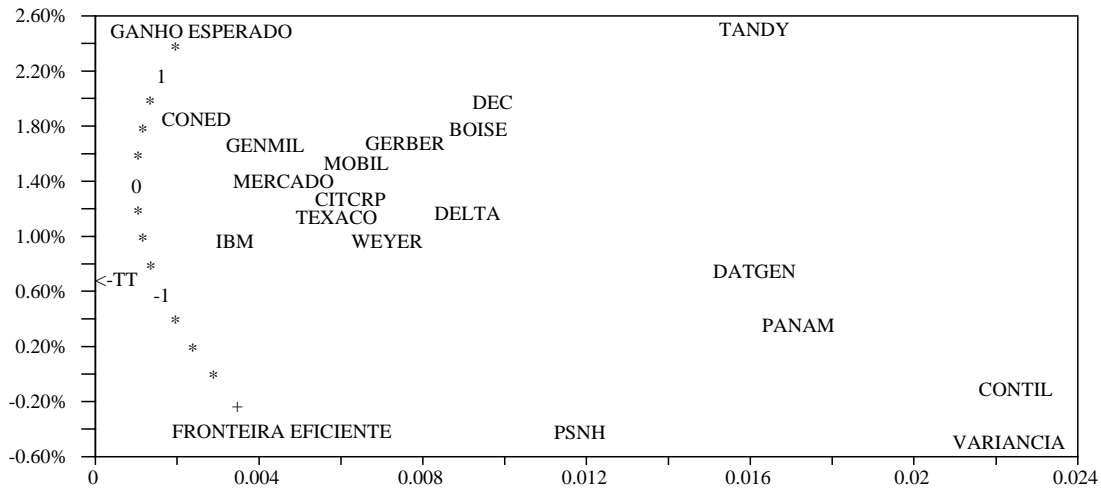


Figura 4: Bolsa de Nova York, cotações mensais entre Janeiro de 1976 e Dezembro de 1985. Os ganhos esperados e os riscos (variância) para diversas proporções de duas carteiras eficientes determinam uma fronteira eficiente (asteriscos). No mesmo gráfico, as posições ocupadas por cada um dos activos em causa, pelo índice do mercado e pelos Títulos do Tesouro (TT).

de 1985) os ganhos esperados e a variância para tais proporções. No mesmo gráfico podem ver-se também as posições ocupadas por cada um dos activos em causa, pelo índice do mercado e pelos Títulos do Tesouro — supostamente, um activo que não tem risco. A referida tabela pode facilmente obter-se com a aplicação das fórmulas (11) e (12) para  $\omega$  crescentes. No caso presente, estas fórmulas assumem o aspecto

$$\begin{aligned}
 & +\text{OMEGA} * \$\text{MEAN}(1) + (1 - \text{OMEGA}) * \$\text{MEAN}(2) && \text{(valor esperado)} \\
 & +\text{OMEGA}^2 * \$\text{VAR}(1) + (1 - \text{OMEGA})^2 * \$\text{VAR}(2) + 2 * \text{OMEGA} * (1 - \text{OMEGA}) * \$\text{COV}(1,2) && \text{(variância)}
 \end{aligned}$$

As figuras 5 e 6, nas páginas 13 e 14, mostram uma possível distribuição dos domínios, registos e outros elementos deste exercício numa folha de cálculo. Tanto a tabela que origina um gráfico semelhante ao da figura 4 como as macros, não são aqui representadas.

As duas carteiras eficientes descobertas com a técnica descrita podem estar perto uma da outra sobre a fronteira eficiente ou, pelo contrário, separadas. Quando estão perto, pode ser preciso fazer variar a proporção de uma e outra entre extremos para além de 1 ou inferiores a zero. Caso contrário, apenas uma porção muito pequena da fronteira eficiente seria desenhada.

**14. Proporções negativas:** Ao examinar as proporções que determinam as carteiras eficientes 1 e 2, pode acontecer que algumas delas sejam negativas. Isto quer dizer que esse activo é vendido *curto* (*short sell*). Um activo é vendido curto quando ele não pertence a quem o vende mas foi apenas emprestado.

```
Variance-covariance matrix:
      1      2      3      ...      14      15      16
1 0.006395 0.004496 0.001509 ... 0.002005 0.002255 0.001509
2 0.004496 0.006299 0.001026 ... 0.001847 0.002106 0.001026
.
.
.
16 0.001509 0.001026 0.003454 ... 0.002008 0.001526 0.000646
```

```
Inverted variance-covariance
matrix:
      1      2      3      ...      14      15      16
1 399.6408 -250.198 -34.1898 ... 23.10387 -31.1609 15.83464
2 -250.198 368.8991 34.32297 ... -41.2646 -40.1838 47.86788
.
.
.
16 15.83464 47.86788 58.31418 ... -79.3064 -70.7608 402.4430
```

Figura 5: Uma possível distribuição de elementos na folha de cálculo que determina a fronteira eficiente (primeira parte).

## 2.5 Exercício

15

Num artigo bem conhecido, Roll (1978) [4] discute a capacidade do CAPM para classificar o desempenho de uma carteira. Roll usa um exemplo contendo quatro activos com a seguinte matriz de variância-covariância:

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 20 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 40 & 10 \\ 5 & 1 & 10 & 60 \end{bmatrix}$$

O vector de ganhos esperados é:

$$R^1 = [6, 7, 8, 9].$$

Roll afirma que as seguintes cinco carteiras são eficientes:

w (1)	w (2)	w (3)	w (4)	w (5)
59.60%	40.70%	-4.40%	-49.60%	18.20%
27.60%	31.90%	42.00%	52.40%	37.00%
7.69%	14.00%	29.00%	44.10%	21.50%



Working areas:				Efficient portfolio proportions		
vector of means	means minus constant	vector z (1)	vector z (2)	vector x (1)	vector x (2)	
0.016191	-6.98380	1.203301	-135.452	1	9.27%	2.04%
0.011941	-6.98805	1.708156	-1330.53	2	13.16%	20.06%
0.009616	-6.99038	2.326083	-1886.27	3	17.92%	28.43%
.	.	.	.			.
.	.	.	.			.
.	.	.	.			.
0.016583	-6.98341	2.824715	-1295.18	16	21.76%	19.52%

Line-vector area

Transposed proportions:

	1	2	3	...	16
x(1)t	9.27%	13.16%	17.92%	...	21.76%
x(2)t	2.04%	20.06%	28.43%	...	19.52%

Interim calculations:

	1	2	3	...	16
interim	0.001247	0.000920	0.000740	...	0.001277

Figura 6: Uma possível distribuição de elementos na folha de cálculo que determina a fronteira eficiente (segunda parte).

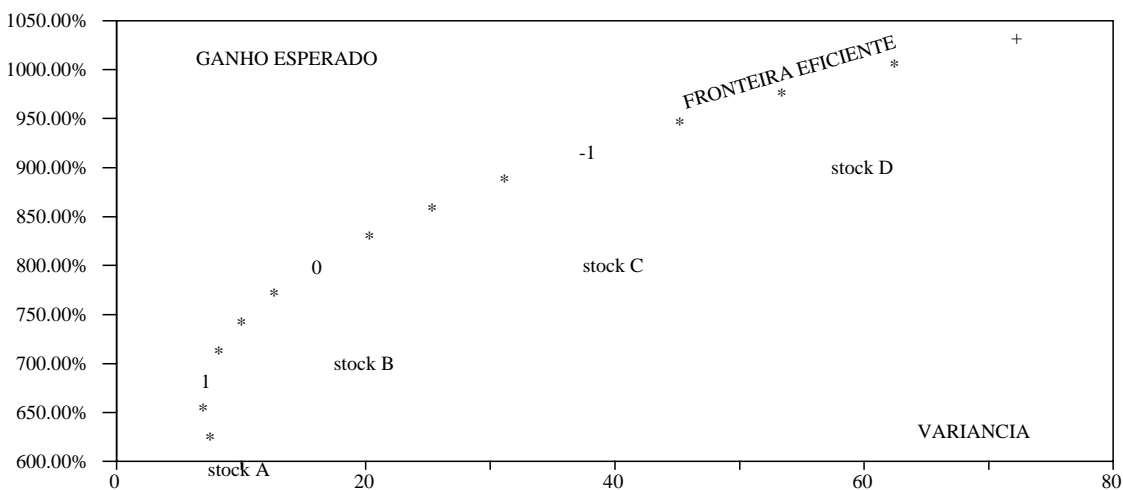


Figura 7: A fronteira eficiente para os quatro activos propostos por Roll.

5.08% 13.40% 33.30% 53.10% 23.30%

É a sua afirmação correcta (ver figura 7)?

# Bibliografia

- [1] F. Black. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45:444–455, Jul 1972.
- [2] E. Elton and M. Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, second edition, 1984.
- [3] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91, March 1952.
- [4] R. Roll. Ambiguity when performance is measured by the securities market line. *The Journal of Finance*, 33:1051–1069, September 1978.