Obrigações de Cupão Fixo

Duarte Trigueiros

INDEG — ISCTE
M. Sc. em Finanças Empresariais,
Maio de 1994

Introdução

Estes apontamentos baseiam-se nos excelentes livros de Benninga (1989) [2] e de Schlosser (1989) [14] sobre métodos quantitativos em Finanças. Porém, os temas foram modificados, no sentido de uma maior explicação ou aprofundamento, e enriquecidos com alguns contributos originais.

O aproveitamento proveitoso desta matéria por parte dos alunos pressupõe um mínimo de familiariedade com os problemas estudados, nomeadamrnte a gestão financeira das empresas. Também pressupõe algum a-vontade e prontidão no uso de ferramentas informáticas comuns nas empresas, especialmente folhas de cálculo.

Agradecimento: Estes apontamentos beneficiaram das sugestões e críticas de muitas pessoas. Particularmente útil foi o trabalho de correcção e adequação à terminologia contabilística portuguesa que o Eng. José Nunes Maia tomou a seu cargo.

Lista dos Exercícios

O nome dos ficheiros que contêm exercícios em 123 têm o prefixo MATE. As folhas de cálculo completas têm o prefixo MATT. A lista de modelos e exercícios correspondentes por capítulo, código (sufixo) e descrição, é a seguinte.

Capítulo	Código	Descrição
1	3a-0	A Capacidade Para Contraír Dívidas
	4a-0	Alternativa Compra-Aluguer
	4a-1	O Lease Alavancado — Ponto de Vista do Lessor
2	11-0	A Duração e a Cotação de uma Bond
	11-1	Duração: Fórmula Abreviada de Chua
	11-3	Bonds com um Período Irregular
	11-4	Imunização com Bonds e Carteiras de Bonds
	11-5	Imunização com Carteiras de Bonds (2. derivada)
Outros:	11-6	Resolução de sistemas de equações (matrizes)
	11-7	O método dos mínimos quadrados (matrizes)

Indice

Capítulo 1

Endividamento, Economia Fiscal e Leasing

O efeito que o endividamento tem no valor das empresas é uma fonte de preplexidade para os teóricos da estrutura financeira. As principais questões em aberto são saber se a existência da dívida faz alguma diferença para o valor da empresa, qual o efeito sobre o custo do capital social de um aumento na dívida e se os impostos — tanto pessoais como os que a empresa paga — modificam o panorama anterior. Estas e outras questões não se podem considerar de modo nenhum resolvidas.

Uma forma de ganhar sensibilidade para estes problemas é tentar resolver um caso concreto. Eeste capítulo estuda primeiro o problema de saber quanto uma empresa estaria em condições de pedir emprestado contra *inflows* futuros. Resolvida tal questão, o capítulo mostrará uma aplicação a *leases*, começando por explorar o ponto de vista do *lessee* e depois o do *lessor*. Estudar-se-á em primeiro lugar a alternativa compra-aluguer. A seguir, determinar-se-á a máxima renda aceitável. A análise dos leases alavancados e os problemas contabilísticos que levantam concluirão este estudo.

Um *lease* é um contrato pelo qual o dono de um activo — o *lessor* ou locador — o aluga a outra pessoa — o *lessee* ou locatário. Existem muitas modalidades de contratos para leasing. Aqui, explorar-se-á um tipo concreto apenas, o mais simples. A finalidade é mostrar o tratamento quantitativo destes problemas. Assim, parte-se do princípio de que os leases estudados são a longo prazo: O activo alugado passa a maior parte da sua vida útil com o lessee. Portanto, para o locatário, o lease aparece como alternativa à compra.

1.1 Capacidade de Endividamento: Um Só Período

Suponha-se que alguém sabe com certeza que, dentro de um ano, irá receber 11.000. Se os bancos estiverem a emprestar dinheiro a uma taxa de 10%, esse alguém poderia conseguir, desde já, 10.000 adiantados sobre os 11.000 que vai receber dentro de um ano. De facto, 11.000 certos dentro de um ano valem 10.000 já. Porém, este raciocínio é simples demais.

1. **Economia Fiscal:** Na realidade, quando as perspectivas são de receber, por exemplo, 100.000 dentro de um ano, seria possivel obter-se junto de um banco $95.419,85$ ao juro de 8%, em vez dos $92.592,59$ que estariam disponíveis de acordo com o raciocínio anterior. Veja-se porquê: O valor a pagar no próximo ano seria

$$95.419,85 \times 1,08 \; = \; 103.053,44.$$

O juro pedido por este empréstimo,

$$103.053,44 \; - \; 95.419,85 \; = \; 7.633,59$$

é reconhecido como custo para efeitos fiscais. Assim, ao contrair o empréstimo e ao usá-lo para financiar um projecto, obtém-se uma redução nos impostos a pagar. Esta redução é uma entrada em caixa e tem o valor — caso o imposto seja de 40% — de

$$0,4 \times 7.633,59 \; = \; 3.053,44. = \text{ Economia Fiscal}$$

Estes $3.053,44$ são o montante que se ganha pelo facto de se pagar menos impostos ao recorrer ao crédito em vez de a capitais próprios. Portanto, no fim do ano, é possivel pagar-se ao banco que concedeu o empréstimo, juntando os 100.000 que nessa altura se recebem com os $3.053,44$ que se ganha pelo facto de recorrer ao crédito.

O montante do empréstimo, os $95.419,85$, é a capacidade para contrair dívidas criada pelo projecto ou simplesmente a *capacidade marginal de endividamento*. Os cálculos feitos correspondem à fórmula

$$\text{Capacidade para contrair dívidas} \; = \; \frac{\text{Pagamento prometido dentro de 1 ano}}{1 \; + \; (1 \; - \; \text{Taxa de imposto}) \text{ Taxa de juro}}$$

É fácil de verificar que a sua aplicação conduz aos valores obtidos acima.

1.2 Capacidade de Endividamento: Mais de Um Período

Vão-se agora generalizar os resultados acima. Se, por exemplo, um projecto liberta 300.000 dentro de um ano e 200.000 dentro de dois anos, qual será capacidade para contrair dívidas assim gerada?

Vai-se proceder do futuro para o passado. Dentro de um ano, tendo já recebido os 300.000 iniciais, o projecto poderia ainda pedir um empréstimo sobre os 200.000 que iria receber no ano seguinte. A capacidade para contrair dívidas assim criada chamar-se-á DB_2. Ela seria:

$$DB_2 = \frac{200.000}{1 + (1 - 0,4)\, 0,08} = \frac{200.000}{1,048} = 190.839,69$$

O projecto será pois capaz de pedir emprestado 190.839, 69 dentro de um ano. Mas quanto é que é possivel pedir já, com base nos meios libertos futuros? Vamos chamar DB_1 a este montante. DB_1 é a capacidade criada pelo projecto no início do ano 1 (o ano 1 começa já; o ano 2 começa de hoje a um ano).

Este valor calcula-se assim: Se o projecto pede emprestado DB_1 já, a saida de caixa (outflow) devida ao pagamento de juros será, dentro de um ano, $(1 - 0,4) \times 0,08 \times DB_1$ ou seja $0,048 \times DB_1$. Note-se que se entrou em conta com o chamado *tax shield*, a economia fiscal obtida com a diminuição nos impostos pelo facto dos juros serem considerados como custos. No final do ano 1, o banco vai querer que o projecto amortize a dívida de modo a que ela seja apenas 190.839, 69. De facto, este é o valor correspondente à capacidade para contrair dívidas do projecto nessa data. Portanto, o banco quererá receber de volta um montante que é $DB_1 - 190.839,69$. A saida de caixa (outflow) que o projecto vai ter de enfrentar no fim do ano 1 será pois

$$DB_1 - 190.839,69 + (1 - 0,4) \times 0,08 \times DB_1.$$

Convirá lembrar que o pagamento de amortizações de dívidas não é um custo para efeitos fiscais.

Para financiar o outflow acima, o projecto tem os 300.000 prometidos para o fim do primeiro ano. Portanto, o cálculo de DB_1 consistirá apenas em resolver a equação

$$DB_1 - 190.839,69 + (1 - 0,4) \times 0,08 \times DB_1 = 300.000$$

em ordem a DB_1. Isto dá $DB_1 = 468.358,49$. É essa a capacidade para contrair dívidas que o projecto tem hoje.

2 Vejamos se bate certo. Hoje, o projecto pede emprestado 468.358, 49. Dentro de um ano dão-se os seguintes cash-flows devido a esta dívida:

Juros:	$468.358,49 \times 0,08$	$=$	$37.468,68$
Economia fiscal sobre os juros:	$-37.468,68 \times 0,4$	$=$	$-14.987,47$
Reembolso da dívida:	$468.358,49 - 190.839,69$	$=$	$277.518,80$
Pagamento líquido:			$300.000,01$

Excepto por um erro de arredondamento, era isto o que se pretendia. O projecto cria uma capacidade para contrair dívidas de 468.358, 49 já, e de 190.839, 69 dentro de um ano.

3 Não é difícil deduzir a expressão analítica da capacidade de endividamento. No caso de dois anos, a fórmula que a permite calcular seria

$$DB_1 = \frac{\text{Pagamento no ano 1} + DB_2}{1 + (1 - \text{Tx imposto}) \times \text{Tx juro}} = \frac{P_1}{1 + (1 - T)\ i} + \frac{P_2}{(1 + (1 - T)\ i)^2}$$

e pode obviamente implementar-se o mesmo raciocínio para um número qualquer de anos. O resultado é

$$DB_t = \sum_{j=1}^{N-t} \frac{\text{Pagamento no ano } (t + j)}{[1 + (1 - T)\ i]^j} \tag{1}$$

que coincide com a fórmula do valor actual onde, em vez do custo da oportunidade i, se usa $(1 - T)i$. Por exemplo, no caso da folha de cálculo 123, a função @NPV $(i\ (1 - T), \text{Pagamento } 1, \cdots, \text{Pagamento N})$ implementa a fórmula acima.

4 Considere-se o seguinte exemplo: Uma companhia vai receber 14.720 líquidos no fim de cada ano, durante os próximos dez anos. Qual é a capacidade para contrair dívidas criada por este caudal de dinheiro quando a taxa de juro é de 8% e os impostos são de 33%?

A folha de cálculo que se obtém, quer pela repetição dos raciocínios explicados na secção 1.2, quer pela simples aplicação da fórmula (1) teria este aspecto:

Ano	DB (t)	r DB (t)	Tr DB (t)	Pagamentos		Tx. de Juro	0,08
1	111702,74	8936,22	2948,95	14720,00		Impostos	0,33
2	102970,01	8237,60	2718,41	14720,00			
...	...			...			
9	27231,54	2178,52	718,91	14720,00			
10	13971,15	1117,69	368,84	14720,00			

Porém, caso se apliquem sucessivamente os raciocínios desenvolvidos na secção 1.2, a mesma fórmula serve para proceder ao somatório e ao cálculo da capacidade. Se, por hipótese, a coluna C é a que contém o cálculo da capacidade e a coluna F contém os pagamentos, seria:

```
Linha  Ano     Formula de DB (t)
...    ...
11      6    +C12/(1+$TX JURO*(1-$IMPOSTO))+F11/(1+$TX JURO*(1-$IMPOSTO))
12      7    +C13/(1+$TX JURO*(1-$IMPOSTO))+F12/(1+$TX JURO*(1-$IMPOSTO))
...    ...
```

Como se vê, quando a capacidade é calculada "para trás", isto é, partindo do futuro para o passado, não é preciso achar expoentes. Claro que o exemplo acima é apenas uma curiosidade. Na prática, é mais expedito usar a fórmula (1). Porém, o modo de trabalhar descrito acima tem aplicação prática em outras situações importantes e merece ser recordado.

1.3 A Alternativa Compra–Aluguer

No exemplo que se irá explorar, uma empresa estuda qual a melhor entre duas alternativas: O aluguer ou a compra de equipamento. Vai-se supôr que os meios libertos devido ao uso desse equipamento não dependem de quem é o seu dono. Isto implica que a empresa é responsável pela manutenção do equipamento, quer ele seja comprado, quer seja alugado; e ainda, que o aluguer não aumentará nem diminuirá nenhuns outros custos operativos.

A análise deste capítulo vai centrar-se nos meios libertos. Supõe-se que o locador paga impostos sobre o resultado do aluguer e portanto consegue uma *tax shield* (economia fiscal) com a amortização do activo alugado. Também se supõe que o locatário pode chamar custo à renda que paga pelo activo alugado. Isto é, as autoridades fiscais tratam o locador como o dono do activo. Convirá recordar que tal pressuposto não é totalmente pacífico. Certas questões contabilísticas e de legislação serão omitidas deste estudo mas podem ser consultadas nos livros ou artigos referenciados em bibliografia. Recomendam-se os seguintes textos: Ofer (1976) [12], McConnell & Schallheim (1983) [10], Levy & Sarnat (1979) [9] e Copeland & Weston (1982) [6].

5. A análise simplista: Uma empresa decidiu adquirir o uso de uma maquinaria que custa 500.000. Se fosse comprada, esta maquinaria seria amortizada linearmente até ao valor residual de zero. A vida útil estimada para este equipamento é de seis anos. A empresa paga 38% de impostos.

A alternativa à compra é o aluguer por seis anos. Um locador pediu por este aluguer uma renda de 125.077 anuais durante seis anos, com o primeiro pagamento a ser efectuado já (início do ano zero) e outros cinco pagamentos adicionais no início de cada um dos restantes cinco anos.

Uma forma de analisar este problema — uma forma enganosa, como se verá — seria a de calcular os meios libertos nos dois casos, alugar ou comprar. A empresa sente que os *tax shields* obtidos com as amortizações ou com o pagamento das rendas não têm nenhuns riscos associados. Suponha-se, além disso, que a taxa que reflecte o valor do dinheiro livre de riscos (*risk-free rate of return*) está em 12% ao ano.

6 Com base nos cálculos feitos com os dados acima, a empresa teria vantagem em alugar o equipamento. Antes, porém, note-se que tanto nesta secção como em outros pontos deste capítulo se vai adoptar em alguns dos mapas apresentados a convenção de dar às saidas de caixa — e aos custos — um sinal positivo e aos inflows um sinal negativo. Assim, alternativas que apresentem os valores actuais mais baixos serão as preferidas. Estão, de facto, a calcular-se os NPV dos custos, não dos ganhos. De acordo com isto, ter-se-ia:

$$\begin{aligned}
\text{NPV (leasing)} &= \sum_{t=0}^{5} \frac{(1-0,38)\times 125.077}{(1,12)^t} &= 357.090\\
\text{NPV (compra)} &= 500.000 - \sum_{t=1}^{6} \frac{0,38 \times 83.333,33}{(1,12)^t} &= 369.805
\end{aligned}$$

O valor 83.333, 33 corresponde à amortização anual do equipamento, quando feita linearmente ao longo de seis anos. Os impostos que não se pagam pelo facto de este valor ser considerado um custo constituem um inflow a subtrair ao preço de custo do equipamento.

Foi dito que este método é enganador. A razão é a seguinte: ignora-se o facto de que um lease é semelhante à compra de um activo com recurso ao crédito. Quando se comparam os cash-flows de um lease com os de uma compra, está-se a comparar realidades que têm riscos financeiros diferentes. Se a empresa considera a hipótese de alugar o equipamento, podia de igual modo considerar a hipótese de contrair um empréstimo para comprá-lo. Asim, obteria benefícios derivados dos impostos e o padrão de cash-flows seria diferente também.

O método de analisar leases que a seguir se explorará tenta descobrir qual o empréstimo que seria capaz de produzir meios libertos — e portanto os riscos financeiros — equivalentes aos do lease em questão. Consequentemente, tal método é chamado *do empréstimo equivalente*.

1.4 O Empréstimo Equivalente

Vai-se descobrir um empréstimo capaz de gerar um caudal de saida de dinheiro equivalente ao de um lease. Assim, torna-se possível a comparação com uma compra. Voltando ao exemplo anterior, tinha-se visto que os números respeitantes a ambas as alternativas eram:

Impostos	0.38	0.62	= 1 - T
Custo inicial	500000		
Taxa de juro	0.12		
Renda	125077	77547.7	= Renda * (1 - T)
Amortiz. anual	83333.3	31666.6	= D * T

Vai-se determinar a diferença, em meios libertos líquidos de impostos, entre alugar e comprar o equipamento:

Ano	0	1	2	3	4	5	6
Renda dp imp.	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	
Custo	-500000						
Am. tax shield		31666.6	31666.6	31666.6	31666.6	31666.6	31666.6
V. residual							0
Cash Flow:	-422452	109214	109214	109214	109214	109214	31666.6

Este caudal de cash representa o custo efectivo do aluguer já que, para além daquilo que se paga pelo acréscimo do aluguer — os $125.077 \times (1-T)$ — deve-se ainda considerar o *custo da oportunidade*, i.e., aquilo que se deixa de poupar nos impostos por vias das amortizações.

O *tax shield* que se obtém no caso da compra, devido ao facto das amortizações aparecerem como custos, coincide obviamente com os impostos que estas amortizações evitam pagar.

7 Agora suponha-se que a empresa pede emprestados 463.161, 73 por seis anos, à taxa habitual. Pois bem, tal empréstimo pode ser amortizado e os juros pagos por um caudal de dinheiro exactamente equivalente aos meios libertos diferenciais que foram calculados acima. Isto é facil de provar, construindo um mapa do serviço dessa dívida:

Ano	A amort. no inic.	Juro	Amort. no ano	Outflow dep. impost.
1	463161	55579.4	74755.1	109214

2	388406	46608.7	80316.9	109214
3	308089	36970.7	86292.5	109214
4	221797	26615.6	92712.7	109214
5	129084	15490.1	99610.5	109214
6	29473.8	3536.85	29473.8	31666.6

Note-se que o outflow depois de impostos tem em conta os *tax shields* que se ganham pelo facto do juro ser um custo:

$$\text{Outflow dp impostos} \;=\; \text{Amortização dívida} \;+\; (1 - \text{Tx. imposto}) \times \text{juro} \qquad (2)$$

Como foi possível determinar o valor $463.161,73$? As folhas de cálculo podem obter o mapa do serviço da dívida acima, tanto no sentido normal ou lógico — a partir do montante da dívida obtém-se o resto — como no sentido inverso: A partir de um caudal de saida de dinheiro, obtém-se a dívida que lhe deu origem. Isso consegue-se fazendo todo o mapa "de trás para diante": Primeiro, digitam-se os outflows. Depois, determinam-se as amortizações a partir da fórmula (2). O montante da dívida no início de cada ano pode então obter-se por acumulação; e a partir destes, os juros. Claro que, com este proceder, se criou um sistema de equações, não um simples encadeado de operações aritméticas. Este sistema pode ser resolvido iterativamente pelo método de Gauss-Siedel. Note-se porém que a maneira mais imediata de chegar a este valor seria usando a função @NPV $(i\ (1-T), 109214 \cdots 31666)$ ou outra equivalente existente em diferentes folhas de cálculo.

8 O valor $463.161,73$ é, de facto, a capacidade para contrair dívidas que se perde com um caudal de saida de dinheiro assim:

```
109214   109214   109214   109214   109214   31666,6
```

Isto significa que $463.161,73$ é o valor actual, descontado de modo a reflectir os impostos, dos cash-flows acima. Pode portanto escrever-se

$$\text{Empréstimo equivalente} \;=\; \sum_{t=1}^{5} \frac{(1-T)\times L + D\times T}{[1+(1-T)\times i]^t} + \frac{D\times T}{[1+(1-T)\times i]^6} \qquad (3)$$

onde D é a amortização anual e L é a renda. E de facto,

$$463.161,73 = \sum_{t=1}^{5} \frac{109.214}{[1+(1-0.38)\times 0,12]^t} + \frac{31.667}{[1+(1-0.38)\times 0,12]^6}$$

Posto isto, torna-se fácil comparar o lease com a compra. Os cash-flows associados á compra do equipamento com recurso a um crédito de 463.161,73 são equivalentes aos associados ao seu lease.

A tabela abaixo mostra este facto com detalhe:

Ano	0	1	2	3	4	5	6
COMPRAR:							
Custo	500000						
amort. tax shield		-31666	-31666	-31666	-31666	-31666	-31666
V. residual							0
Emprest. eqv.	-463161						
Em divida		463161	388406	308089	221797	129084	29473.8
Pagamento:							
Juros		55579.4	46608.7	36970.7	26615.6	15490.1	3536.85
Amort.		74755.1	80316.9	86292.5	92712.7	99610.5	29473.8
Depois imp.		109214	109214	109214	109214	109214	31666.6
Total Comprar	36838.2	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	0
LEASE: Cash-fl.	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	77547.7	

Vê-se claramente que a alternativa de comprar o equipamento com recurso ao crédito tem um custo inicial que é menor do que o lease, e depois, ao longo dos anos seguintes, custos idênticos.

9 Em resumo, o método do empréstimo equivalente consiste apenas no seguinte: Comparar o empréstimo equivalente (neste caso os 463.161,73) com a diferença entre os cash-flows da compra e do lease no ano zero (neste caso os 422.452,20). Se o empréstimo equivalente é maior, comprar é preferível.

1.5 Ajuste Directo da Análise Simplista

Uma forma alternativa de proceder consistiria em ajustar a análise simplista levada a cabo na secção 1.3. Com isto, ganha-se também uma maior intuição sobre o que é o empréstimo equivalente.

Quem aluga o equipamento paga à empresa de leasing um caudal de cash anuais liquidos de impostos de 109.214 durante os primeiros cinco anos e mais 31.667 no sexto ano. Foi já visto que a capacidade para contrair dívidas criada por este caudal é de 463.161,73. Se agora se reparar no mapa do serviço da dívida acima, ver-se-á que os juros criam, neste caso, *tax shields* com os seguintes valores:

Ano	Juro	Tax shield (juros)
1	55579.4	21120.1
2	46608.7	17711.3
3	36970.7	14048.8
4	26615.6	10113.9
5	15490.1	5886.24
6	3536.85	1344.00

O valor actual destes *tax shields* é 53.425 à taxa de 12%. Portanto tem-se aqui o custo extra do lease, aquele que a análise simplista da secção 1.3 não teve em conta. Se agora tal custo fôr reconhecido, obtém-se:

Lease:	NPV tax shield da renda a 12%	357089
	NPV tax shields perdidos, juros	53424.9
	Total NPV do lease	410514
Compra:	Custo do equipamento	500000
	NPV tax shields das amortizacoes	130194
	Total NPV da compra	369805

Portanto a compra torna-se preferivel ao lease. A análise simplista pode ser usada para decidir sobre as vantagens de um lease desde que se adicione ao custo deste lease o valor actual dos *tax shields* da capacidade para contrair dívidas que foi perdida com o lease.

Uma forma alternativa consistiria em subtrair o valor actual dos *tax shields* sobre a capacidade perdida ao custo do equipamento. No exemplo dado acima, estes dois métodos dão a mesma resposta. Porém, num caso mais geral, seria preciso ter em conta que nem todos os cash-flows contemplados pelo lease podem ser descontados à taxa aplicável em empréstimos livres de risco. Isto pode ser o caso, por exemplo, para o valor residual dos bens.

A análise acima aplica-se sem mais aos casos em que existe a alternativa lease *versus* compra. Porém, em outras situações, a alternativa é directamente o lease *versus* a compra com recurso ao crédito. Isto pode acontecer quando o fabricante de um equipamento se oferece para emprestar o montante necessário à compra. Então, pode proceder-se da seguinte forma: Usar a análise simplista, subtrair o valor actual dos *tax shields* sobre a dívida usada para comprar o bem.

1.6 A Máxima Renda Aceitável

O locador pretende a maior renda possível mas não tanto que leve o locatário a preferir a compra com empréstimo. Se tanto o locador como o locatário pagam impostos pela mesma pauta, se além disso têm acesso ao mesmo crédito e avaliação do valor residual, a conclusão imediata é que a única renda aceitável por ambas as partes seria aquela perante a qual o locador se mostra indiferente em alugar ou não o activo e o locatário é indiferente em comprar o bem ou aluga-lo. Claro que no mundo real dão-se diferenças nos parâmetros acima e são tais diferenças que tornam atraente o negócio.

Pode usar-se a lógica agora enunciada para calcular a máxima renda que o locador deve pedir para que seja aceitável. Sabemos que, quando se usa o método do empréstimo equivalente, podem ignorar-se todos os cash-flows para lá do primeiro. Portanto, só é preciso calcular o cash-flow no ano zero. No exemplo acima eles eram

```
Cash-flow liquido de impostos no caso do lease = (1-T) * renda:   77548
Custo do equipamento:                                            500000
   Subtraindo o emprestimo equivalente,                          463162
Cash-flow liquido de impostos no caso de compra com credito:      36838
```

A máxima renda aceitável é aquela que fará igualar o cash-flow líquido de impostos no caso do lease (ano zero) com o cash-flow líquido de impostos no caso da compra com crédito, também ano zero. Isto é:

$$(1-T) \times \text{Renda} \;=\; \text{Custo} \;-\; \text{Empréstimo equivalente}. \tag{4}$$

Resolvendo para Renda obtém-se o seu máximo aceitável:

$$\text{Renda} \;=\; \frac{\text{Custo} \;-\; \text{Empréstimo equivalente}}{1-T}$$

Um valor aproximado para este máximo pode obter-se com recurso a tabelas de what-if. O valor exacto viria, neste caso concreto, com a resolução das fórmulas (4) e (3) em ordem à Renda. Obter-se-ia:

$$\text{Máxima renda aceitável} \;=\; \frac{A}{1-T} \qquad \text{Com} \qquad A = \frac{\text{Custo} \;-\; \sum_{t=1}^{6} \frac{D \times T}{[1+(1-T)\times i]^t}}{1+\sum_{t=1}^{5} \frac{1}{[1+(1-T)\times i]^t}}$$

onde D é a amortização. Tal expressão, fácil de deduzir, não é cómoda de implementar em folha de cálculo. No exemplo de que nos ocupamos, a máxima renda aceitável viria a ser de 112.081.

1.7 A Análise Financeira de Leases Alavancados

Num *lease alavancado* o locador financia a compra de um activo que deseja alugar recorrendo ao crédito. Para o locatário não há modificações no seu ponto de vista. Para o locador, porém, os cash-flows de um lease alavancado levantam dois problemas interessantes:

- A análise financeira do lease sob o ponto de vista do locador. Isto inclui o cálculo dos cash-flows obtidos pelo locador e do seu valor actual.
- O tratamento contabilístico do lease. O uso do método contabilístico *das fases múltiplas* (MPM) para a avaliação da taxa de desconto em leases alavancados.

O MPM é diferente do IRR, a taxa interna de rendibilidade. Num contexto comum tal facto seria irrelevante já que, onde quer que os mercados sejam eficientes, só os cash-flows contam. Porém, num mundo menos eficiente, as pessoas tendem a ficar preocupadas com a forma como os números aparecem nos seus relatórios e contas.

11 Podem explorar-se estes temas construindo um exemplo. Uma companhia de leasing está a considerar a possível compra de um activo cujo preço é 1.000.000. A compra far-se-ia com 200.000 de capital e 800.000 com recurso ao crédito. A taxa de juros a praticar seria de 10% ao ano, de modo que a anuidade a pagar (juros incluidos) seria de 105.179 ao longo dos próximos quinze anos — como se pode ver usando a função @PMT.

A companhia pode alugar o activo por 110.000 ao ano, pagável no fim de cada ano. O termo deste lease é também quinze anos. O activo pode ser amortizado ao longo de cinco anos. As taxas de amortização anuais seriam 15%, 22%, 21%, 21% e 21%. A companhia prevê que no termo do lease o activo terá um valor de 300.000 no mercado. Como o bem estaria amortizado na altura da venda (ano 16), todo o valor residual seria sujeito a impostos. A companhia paga 37% de impostos.

Todos estes factos se encontram na tabela da figura 1, página 13. Também aí se podem ver os cash-flows do locador.

Notar que os cash-flows do locador foram calculados obviamente pela expressão

$$\text{Cash-flow } = (1-T)\times \text{ Renda } + T \times \text{ Amortização } - (1-T)\times \text{ Juro } - \text{ Reembolso}$$

Custo do activo	1000000	
Termo do lease	15	anos
Renda do lease	110000	ao ano
Valor residual	300000	no fim de 15 anos
Capital	200000	
Divida	800000	a amortizar em 15 anos
Taxa de juro	0.1	ao ano
Anuidade	105179	
Imposto	0.37	sobre os lucros

Ano	Capital inestido	Renda e/ou v. resid.	depois imp.	Amort.	T * Amort.	Divida no comeco do ano	Servico da div.	Juro	Reembolso anual	CASH FLOW
0	-200000									-200000
1		110000	69300	150000	55500	800000	105179	80000	25179	49221
2		110000	69300	220000	81400	774821	105179	77482	27697	74189
3		110000	69300	210000	77700	747124	105179	74712	30467	69465
4		110000	69300	210000	77700	716658	105179	71666	33513	68337
5		110000	69300	210000	77700	683144	105179	68314	36865	67097
6		110000	69300			646280	105179	64628	40551	-11967
7		110000	69300			605729	105179	60573	44606	-13467
8		110000	69300			561123	105179	56112	49067	-15117
9		110000	69300			512056	105179	51206	53973	-16933
10		110000	69300			458082	105179	45808	59371	-18930
11		110000	69300			398712	105179	39871	65308	-21127
12		110000	69300			333404	105179	33340	71839	-23543
13		110000	69300			261565	105179	26157	79022	-26201
14		110000	69300			182543	105179	18254	86925	-29125
15		110000	69300			95618	105179	9562	95617	-32341
16		300000	189000			0			0	189000

Figura 1: Resumo dos dados iniciais e os cash-flows do locador no problema em estudo.

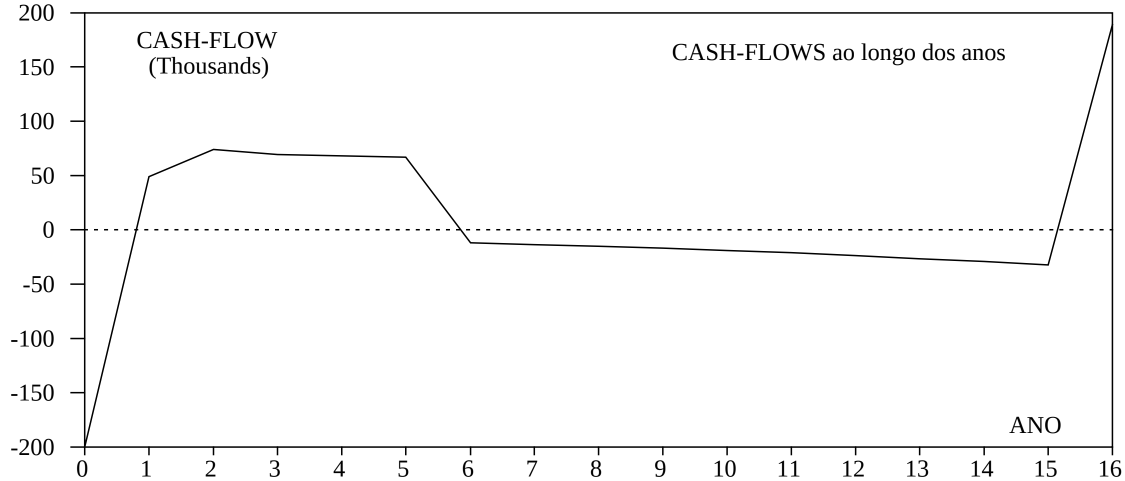

Figura 2: Evolução dos cash-flows ao longo do periodo de aluguer.

No último ano do lease, o valor residual depois de impostos é somado ao cash-flow.

O aspecto dos cash-flows é o que se apresenta no gráfico da figura 2, na página 14. Eles começãm por ser positivos no início, diminuindo com o tempo. No termo do contrato tornam-se positivos de novo. Tal evolução é típica para leases alavancados. A razão deste comportamento deve ir buscar-se à amortização: Quanto mais acelerada fôr a amortização no início da vida de um bem, maiores os inflows devidos aos respectivos *tax shields*. Nos anos finais, a porção das anuidades que cria vantagens fiscais — os juros — cai enquanto o reembolso, que não gera vantagens fiscais, aumenta.

12. Uma Análise com IRR Que pode fazer-se com este caudal de cash? Uma forma de continuar a análise acima seria desconta-los a uma taxa adequada onde o risco tivesse sido considerado.

No exemplo acima, o valor actual do caudal de dinheiro à taxa correspondente ao empréstimo livre de riscos é de 38.206 (desconta-se à taxa corrigida para impostos do locador). Portanto, este lease parece ser um bom negócio para o locador. A verdade é que os locadores se sentem frequentemente pouco à vontade com NPV's. Eles preferem o IRR, a taxa interna de rendibilidade, como medida do interesse económico do aluguer. Como os cash-flows mudam de sinal duas vezes é possível que também existam dois IRR. Um teste rápido com funções já existentes em folhas de cálculo mostra que, neste caso, só existe um IRR de $12,95\%$. Usando essa taxa pode obter-se um padrão do valor económico do lease alavancado a partir do cash-flow. Esse padrão seria o da figura 3 na página 15.

Ano	CASH FLOW	Investimento	resultado	Reducao no investimento
1	49221	200000	25903	23318
2	74189	176682	22883	51306
3	69465	125376	16238	53227
4	68337	72149	9344	58993
5	67097	13156	1704	65393
6	-11967	-52237	-6766	-5201
7	-13467	-47036	-6092	-7375
8	-15117	-39661	-5137	-9981
9	-16933	-29680	-3844	-13089
10	-18930	-16591	-2149	-16781
11	-21127	190	25	-21151
12	-23543	21341	2764	-26307
13	-26201	47648	6171	-32372
14	-29125	80020	10364	-39489
15	-32341	119509	15478	-47819
16	189000	167328	21672	167328

Figura 3: Padrão do valor económico do lease alavancado a partir do IRR do cash-flow.

O resultado atribuível ao lease em cada ano calcula-se como o produto do IRR pelo investimento no início desse ano. O restante do cash-flow desse ano é a redução no investimento referido. A última redução no investimento—os 167.329—coincide com o investimento no início do ano anterior o que mostra, em termos económicos, que o investimento se paga a si mesmo a uma taxa igual ao IRR.

13 O facto interessante que esta tabela põe em evidência é que cinco dos números que expressam resultados são negativos. Existe uma forma de interpretar isso: resultados negativos querem dizer que em alguns dos anos o lease não é economicamente interessante para o locador, muito embora não seja possível desistir dele. No início do ano seis a empresa enfrenta dez anos de cash-flow negativo. Só no ano 16 volta a empresa a ver um cash-flow positivo.

O locador estaria desejoso de pagar a alguém para tomar sobre si o contrato no início do ano seis. É esse facto o que leva a análise acima a atribuir um valor económico negativo ao lease neste ponto. Em termos económicos, o lease é, no ano seis, pior do que não ter valor: É um passivo.

14. Contabilidade e Leases Alavancados As fases de resultado negativo nos leases alavancados causam à contabilidade das empresas que se dedicam a este negócio umas certas dores de cabeça. De facto, o locador deveria logicamente usar a taxa interna de

phase rate	0.106483		END		0.170996
LOW	0.106475		RUNNUMBER		17
HIGH	0.106491		MAXRUN		20

ano	investmento no inicio do ano	cash flow	resultado	reducao no investmento
1	200000	49221	21297	27924
2	172076	74189	18323	55866
3	116210	69465	12374	57090
4	59119	68337	6295	62042
5	-2923	67097	0	67097
6	-70020	-11967	0	-11967
7	-58053	-13467	0	-13467
8	-44586	-15117	0	-15117
9	-29469	-16933	0	-16933
10	-12536	-18930	0	-18930
11	6394	-21127	681	-21808
12	28202	-23543	3003	-26546
13	54748	-26201	5830	-32031
14	86779	-29125	9241	-38365
15	125144	-32341	13326	-45667
16	170811	189000	18189	170811

Figura 4:

rendibilidade dos cash-flow provenientes do lease da forma descrita acima. Estes cash-flow seriam escriturados como um resultado.

Porém, na prática, os locadores evitam o mais que podem registar uma perda nos seus livros, mesmo quando se trata de uma perda como as descritas acima. Desta repugnância surgiu o referido método contabilístico das fases múltiplas (MPM) que redunda no método do IRR também referido acima sempre que não há perdas mas que é capaz de mascarar as perdas próprias deste tipo de negócio.

Defina-se um *ganho por fases* da seguinte forma:

O que se consegue com este método vem claramente descrito nas figuras 4 e 5 e é auto-explicativo.

1.8 Exercícios

15. Um caudal de entrada de dinheiro de 100.000 dentro de um ano, 50.000 dentro de dois e 50.000 dentro de três, cria uma capacidade para contrair uma dívida de 166.223, 96 já, caso a taxa de juro seja de 19%. Qual o imposto que se está a pagar?

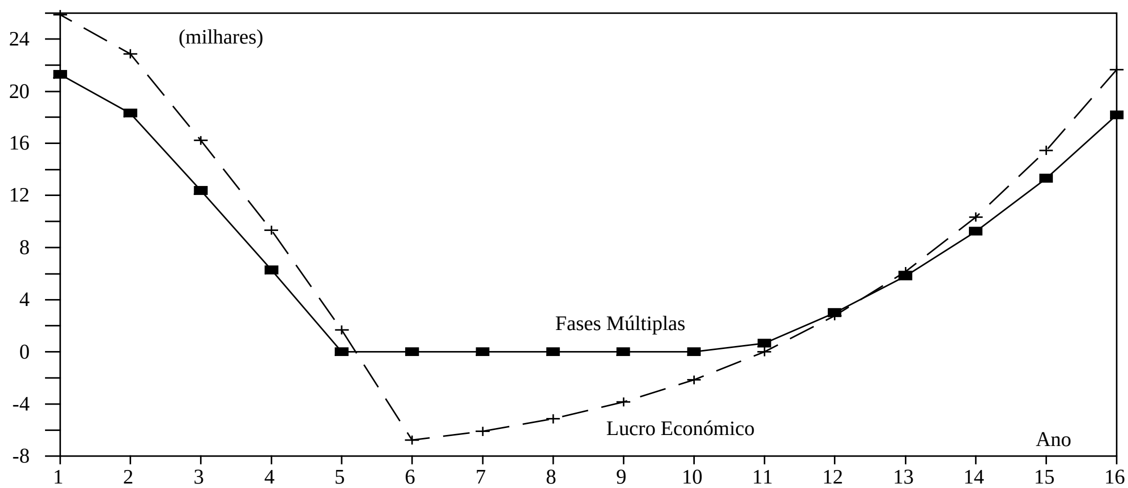

Figura 5: O resultado económico comparado com o método das fases múltiplas.

16. Considerar o exemplo explorado na secção 1.3 mas com as duas seguintes alterações:

1. A renda é pagável no início dos anos $1, \cdots, 6$.

2. O equipamento é amortizado linearmente até um valor residual de 50.000. Tanto o locador como o locatário prevêm que o valor do equipamento, quando posto no mercado no início do ano 7 será de 76.000. A diferença entre este valor e o valor contabilístico será objecto de impostos á mesma taxa que os resultados da empresa.

Sendo assim,

- Suponha-se que o cash-flow líquido de impostos que é recebido com a venda residual do equipamento é parte dos cash-flows que determinam o empréstimo equivalente. Deveria a empresa comprar, ou pelo contrário, alugar, se a renda fosse de 112.000?

- Qual seria a máxima renda aceitável?

- Calcular a máxima renda aceitável para diferentes taxas de imposto.

17. Reconsiderar o exemplo de lease alavancado descrito na secção 1.3. Mostrar que, quando o tipo de amortização é linear ao longo de toda a vida do activo (15 anos) não se dão resultados negativos. Explicar.

18. No mesmo exemplo, encontrar a renda mínima para que não se dêm lucros negativos.

Capítulo 2

Duração e estratégias de Imunização

Este capítulo revê alguma da teoria e aplicações numéricas ligadas à análise da duração e às estratégias de imunização com obrigações de cupão fixo. A análise da *duração* é o estudo da sensibilidade da cotação de tais obrigações a mudanças na taxa de juro. Trata-se de uma análise largamente usada na gestão de carteiras de obrigações. Aqui, só interessam os aspectos desta análise mais ligados à forma como se pode avaliar a duração com a ajuda de folhas de cálculo.

19 Uma *estratégia de imunização* consiste em fazer a gestão de uma carteira de obrigações de modo a conseguir que "o seu valor seja sempre tão próximo quanto possível do valor de outro activo" (Nelson & Schaefer (1983) [11]. Este assunto é uma continuação natural da análise da duração.

2.1 Duração

A duração mede a sensibilidade da cotação de uma obrigação a mudanças na taxa de juro à qual os meios por ela libertos são descontados.

Considere-se uma obrigação com pagamentos de $C_t, t = 1, \cdots, N$ Em geral, os primeiros $N - 1$ pagamentos referem-se a juros e o último, C_N será a soma de duas parcelas: a amortização de todo o capital e mais o último juro. Considere-se agora o valor actual da média destes pagamentos, ponderada pelo tempo que falta para a efectivação de cada um deles:

Período	Pagamento	Tempo $\times$ Pagamento	NPV
1	C_1	$C_1 \times 1$	$C_1/(1+r)$
2	C_2	$C_2 \times 2$	$C_2/(1+r)^2$
3	C_3	$C_3 \times 3$	$C_3/(1+r)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
N	C_N	$C_N \times N$	$C_N/(1+r)^N$

Isto é, a referida média ponderada pelo tempo que falta decorrer para cada um destes pagamentos poder-se-á escrever

$$\sum_{t=1}^{N} \frac{C_t t}{(1+r)^t}$$

Define-se *duração* como o valor acima, quando expressa na forma de uma percentágem do valor actual da obrigação:

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{N} \frac{C_t t}{(1+r)^t} \tag{5}$$

r continua a ser a taxa de juro. P é o valor actual da bond.

20. Dois exemplos: Considerem-se duas obrigações: a "bond A" foi emitida agora. O seu valor facial é mil dólares, oferece a taxa de juro actual (7%) e matura em 10 anos; a "bond B" foi emitida há cinco anos quando a taxa de juro era mais elevada. Tem também um valor facial de mil dólares mas oferece 13% por cada cupão. Quando emitida, esta segunda obrigação tinha uma maturidade de 15 anos. Faltam portanto mais dez para a maturidade. Uma vez que a taxa de juro que se está a praticar agora é 7%, a cotação desta segunda obrigação é

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{1000 \times 0,13}{(1+0,07)^t} + \frac{1000}{(1+0,07)^{10}} = 1421,41 \text{ dólares}$$

Para se calcular a duração de cada uma destas obrigações é conveniente fazer-se uma tabela como a da figura 6 na página 20. Mais adiante se verá um método menos trabalhoso para achar a duração.

21 Como seria de esperar, a duração da bond A é maior do que a da B já que os pagamentos médios de A levam mais tempo do que os da B. Pode ver-se isto de outra maneira: O valor actual líquido do pagamento da bond A no primeiro ano é 70 dólares. Isto representa 6,54% do seu preço enquanto que o valor actual líquido de B referente ao

	Bomd A: 0 em 10		Bond B: 5 em 15	
	1000	1000	1000	1421.41
	7%	1.07	13%	1.07
t	C_t	fraccao	C_t	fraccao
1	70	0.065420	130	0.085475
2	70	0.122281	130	0.159766
3	70	0.171422	130	0.223972
4	70	0.213610	130	0.279092
5	70	0.249545	130	0.326043
6	70	0.279863	130	0.365655
7	70	0.305147	130	0.398690
8	70	0.325925	130	0.425837
9	70	0.342678	130	0.447726
10	1070	5.439337	1130	4.041301
total, duracao:		7.515232		6.753561

Figura 6: Tabela para a análise da duração de duas bonds, A e B.

pagamento do primeiro ano é 130 dólares, que são 8,55% do seu preço. Os números para o segundo ano são respectivamente 12,23% e 15,98%. Para se obterem os valores referentes ao segundo ano é preciso dividir a linha correspondente da tabela 6 por dois, já que na fórmula da duração, (5), cada pagamento é pesado pelo número de períodos que irão decorrer até à sua efectivação.

2.2 A Duração e a Volatilidade dos Preços

Para se ver como a duração pode ser usada para estimar a volatilidade das cotações, escreva-se a cotação corrente de uma obrigação na forma

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

A *mudança na cotação* devida a uma mudança na taxa de juro r, será dada por

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{t=1}^{N} \frac{-t\ C_t}{(1+r)^{t-1}} \quad \text{que se pode escrever} \quad \frac{dP}{dr} = \frac{-D\ P}{1+r}$$

A fórmula acima proporciona duas interpretações úteis para D, a duração. Em primeiro lugar, a duração pode ser olhada como a elasticidade do preço de uma obrigação em relação à taxa de juro:

$$-D = \frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dr}{1+r}}$$

Em segundo lugar, ela pode ser usada para medir a volatilidade da cotação da obrigação, como se pode ver em

$$\frac{dP}{P} = -D\ \frac{dr}{1+r} \quad \text{ou ainda} \quad dP = -D\ P\frac{dr}{1+r}$$

Volte-se aos exemplos acima. Suponha-se que a taxa de juro sobe 0,7%, de 7% para 7,7%. O que acontecerá aos preços? No caso da bond A ele virá:

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{1000 \times 0,07}{(1+0,077)^t} + \frac{1000}{(1+0,077)^{10}} = 952,39 \text{ dólares}$$

E no caso da bond B seria da mesma forma

$$\sum_{t=1}^{10} \frac{1000 \times 0,13}{(1+0,077)^t} + \frac{1000}{(1+0,077)^{10}} = 1360,5 \text{ dólares}$$

A fórmula da volatilidade das cotações prevê que as mudanças no preço das obrigações podem ser aproximadas pela expressão

$$\Delta P \approx -DP\Delta r, \quad \text{uma diferença finita, semelhante a} \quad dP = -D\ P\frac{dr}{1+r}.$$

Vejam-se os valores no exemplo que se está a estudar:

Bond	$\Delta\ P$	D	P	Δr	$-D\ P\ \Delta r$
A	$-41,61$	$7,52$	1000	0,007	$-52,64$
B	$-60,91$	$6,75$	1421	0,007	$-67,14$

2.3 Fórmulas Abreviadas Para a Duração

A análise da duração requer uma boa quantidade de cálculos morosos. Pior ainda, pelo facto de esses cálculos envolverem somatórios com um número variável de parcelas, não são facilmente automatizáveis. No caso especial em que se está a calcular a duração de uma obrigação cujos cupões pagam o mesmo ao longo de todos os períodos, Chua (1984) [5] e Babcock (1985) [1] deduziram fórmulas capazes de simplificar os cálculos. Estas fórmulas fornecem ainda intuições interessantes sobre o conceito de duração.

22 Vai-se primeiro reproduzir as linhas gerais do raciocínio de Chua. Considere-se uma obrigação com N cupões até à maturidade. Suponha-se que em cada $t, t = 1, \cdots, N$, este activo paga um cupão com o valor de C e que em $t = N$, o período final, paga, além deste C, um valor de F que é a amortização do seu valor facial. Se a cotação corrente no mercado é P, então o ganho, r, até à maturidade (*yield to maturity, YTM*) desta obrigação, pode calcular-se da mesma forma como se calcularia uma taxa interna de rendibilidade de um activo ao seu preço actual. Seria preciso achar um r tal que

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^N}$$

A fórmula da duração é dada por

$$D = \frac{1}{P} \left[\sum_{t=1}^{N} \frac{t\,C}{(1+r)^t} + \frac{N\,F}{(1+r)^N} \right]$$

Se se definir

$$X = \sum_{t=1}^{N} \frac{t}{(1+r)^t}$$

pode escrever-se a fórmula da duração desta forma:

$$D = \frac{C\,X + N\,F/(1+r)^N}{P}$$

Além disso, pode facilmente ver-se que

$$\frac{X}{1+r} - X = \frac{N}{(1+r)^{N+1}} - \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+r)^t}$$

Tenha-se agora presente que a parcela que aparece acima a subtrair,

$$\sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+r)^t},$$

é o valor actual de uma anuidade com N períodos a 1 dólar por período, descontada a uma taxa de juro de r. Calcula-se com a função @$PV(1, r, N)$ da folha de cálculo 123. Pode-se portanto dizer que

$$PV(1, r, N) + \frac{X}{1+r} - X = \frac{N}{(1+r)^{N+1}}$$

Por outro lado, é bem sabido (ver, por exemplo, Brealey & Myers 1981 [13]) que

$$PV(1, r, N) = \frac{(1+r)^N - 1}{r(1+r)^N}$$

Com um pouco de manipulação algébrica pode obter-se a seguinte expressão para X:

$$X = \frac{(1+r)^{N-1} - (1+r) - r\,N}{r^2(1+r)^N}$$

Daqui se obtém a fórmula de Chua para o cálculo simplificado da duração:

$$D = \frac{1}{P}\left[C\,\frac{(1+r)^{N+1}-(1+r)-r\,N}{r^2(1+r)^N}+\frac{N\,F}{(1+r)^N}\right] \tag{6}$$

Babcock simplificou ainda mais a expressão acima, obtendo

$$D = N\,\left(1-\frac{y}{r}\right)+\frac{y}{r}PV(1,r,N)(1+r) \tag{7}$$

onde $y = C/P$ é muitas vezes referido como o ganho actual, (*current yield*), de uma obrigação. A fórmula simplificada de Babcock fornece duas intuições importantes acerca da duração:

- A duração é uma média ponderada da maturidade e de $1+r$, pelo PV associado com a obrigação.
- Em muitos casos o ganho, y, da obrigação não será muito diferente do seu ganho até à maturidade, r e a duração não será muito diferente de $(1+r)$PV

Estas intuições têm implicações prácticas, algumas das quais serão exploradas a seguir.

2.4 A Duração e o Ganho Até à maturidade (YTM)

Podem usar-se as fórmulas de Chua ou Babcock para calcular o efeito, no valor da duração de uma obrigação, de mudanças no ganho até à maturidade. Considere-se o seguinte exemplo: Uma obrigação com maturidade de dez anos e um cupão anual que paga 155 dólares, está sugeita a um YTM (ganho até à maturidade ou r) de 7%. Isto dá uma cotação P de 1597 dólares e uma duração de 5,55. Qual será o efeito no valor dessa duração de uma mudança neste r?

23 Para resolver o problema constroi-se uma folha de cálculo que implementa a fórmula de Chua. A disposição dos campos nesta folha pode ser o que se sugere na figura 7. Esta figura mostra também os valores que se obtém no caso do exemplo acima.

O aspecto, em 123, das fórmulas que implementam (6) e os outros desenvolvimentos mostrados acima, é o seguinte:

```
Preco                 @PV(CUPAO,YTM,MATUR)+V_FAC/[1+YTM]^MATUR
Duracao               (1/PRECO)*(CUPAO*PARC_1+PARC_2)
[1+YTM]               1+YTM
parc_1                ([1+YTM]^(MATUR+1)-[1+YTM]-YTM*MATUR)/(YTM^2*[1+YTM]^MATUR)
parc_2                +MATUR*V_FAC/(1+YTM)^MATUR
```

Preco	1597	Duracao	6.55
YTM	7.00%		
Maturidade	10 anos	[1+YTM]	1.07
Cupao	155	parc_1	34.74
V_fac	1000	parc_2	5083.49

Figura 7: Implementação em folha de cálculo da fórmula de Chua.

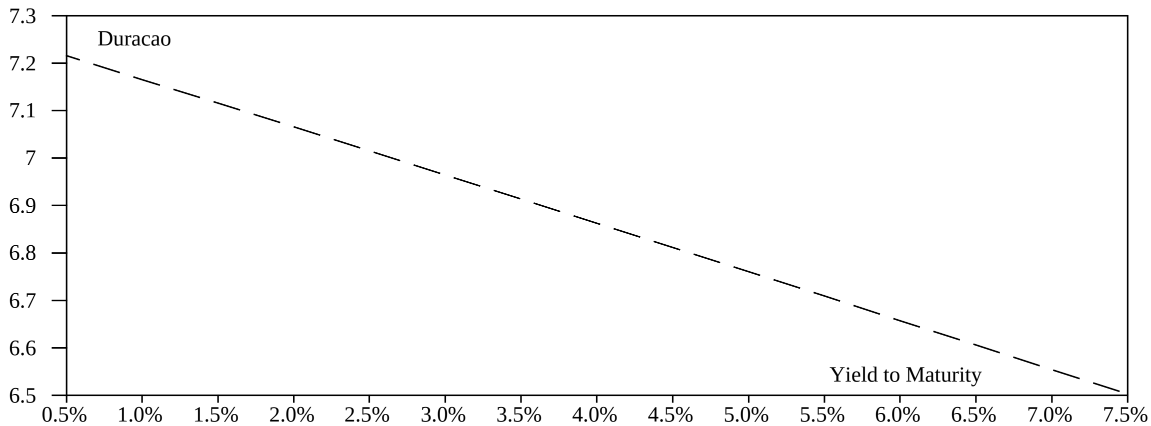

Figura 8: Modo como a duração varia com o YTM.

Aqui, chama-se YTM, *yield to maturity* à taxa r. PARC 1 e PARC 2 são os registos que implementam as duas parcelas que aparecem a multiplicar por $1/P$ na fórmula de Chua.

24 Pode agora ver-se como a duração varia com r. Uma simples tabela obtida com os comandos DATA TABLE 1 conduzirá ao gráfico da figura 8.

2.5 Calculo do YTM com Períodos Irregulares

Um dos problemas encontrados frequentemente na análise da duração é o de calcular o ganho até à maturidade, YTM, quando os pagamentos futuros não se apresentam regularmente espaçados. Esta secção dá um exemplo e mostra depois um pequeno artifício em 123 que permite resolver o problema com facilidade.

25 Considere-se um activo que neste momento custa 100 dólares e que vai pagar 5 dólares dentro de 6/10 de um ano (319 dias); dentro de $1,6$ anos paga outros cinco dólares; dentro de $2,6$ anos e dentro de $3,6$ continua a pagar o mesmo cupão. Por fim, dentro de $4,6$ de um ano paga 105 dólares. Qual é o YTM desta obrigação? Aqui, o primeiro período tem um tamanho diferente dos outros.

"periodo" irregular	cash flow	cash-f ajustado	deslocamento 0.6 anos
0	-100	-97.8827	
1	5	5	
2	5	5	
3	5	5	
4	5	5	
5	105	105	
TIR	0.05496		
marcador	0		

Figura 9: Implementação em 123 do cálculo do YTM com um período irregular no início.

O que se pretende descobrir é um r que seja raiz da equação

$$-100 + \sum_{t=0}^{3} \frac{5}{(1+r)^{t+0,6}} + \frac{105}{(1+r)^{4,6}} = 0$$

Tal como se apresenta, é difícil achar esta raiz com 123. Porém, dividindo ambos os mêmbros por $(1+r)^{0,4}$ obter-se-á:

$$0 = \frac{-100}{(1+r)^{0,4}} + \sum_{t=1}^{4} \frac{5}{(1+r)^{t}} + \frac{105}{(1+r)^{5}}$$

Esta equação já se deixa resolver facilmente em 123, apesar de requerer um outro pequeno estratagema. Faça-se uma folha de cálculo como a da figura 9.

26 O registo do TIR e o primeiro do cash-flow ajustado devem conter fórmulas simples. Na célula chamada IRR é usada a função @IRR do 123 para se calcular a taxa interna de rendibilidade da coluna dos cash-flows ajustados, sempre que o registo MARCADOR estiver a zero:

```
@IF(MARCADOR<>0,0,@IRR(0,CASH_AJUSTADO))
```

Na primeira linha dos cash-flows ajustados, chamada CASH AJUSTADO, calcula-se

```
+PAGAMENTO_INIC/(1+IRR)^(1-DESLOCAMENTO)
```

que, note-se, não é mais do que a parcela

$$\frac{-100}{(1+r)^{0,4}}$$

	sem iterar cash-f ajustado	1. iter. cash-f ajustado	. . .	resultado: cash-f ajustado
	-100	-98.0673	. . .	-97.8828
	5	5		5
	5	5		5
	5	5		5
	5	5		5
	105	105		105
TIR	0	0.05	. . .	0.054958
marcador	2	0		0

Figura 10: Implementação em 123 da estimação do YTM com um período irregular no início: Aspecto da folha de cálculo quando o marcador não está a zero e durante algumas das iterações.

da equação que se pretende resolver em ordem a r.

27 O deslocamento é, neste caso, 6/10 de um ano. Para trabalhar com esta folha de cálculo deve primeiro colocar-se no marcador um valor diferente de zero. Isto assegura que as iterações seguintes não ficarão aprisionadas num loop de ERR. Depois, coloca-se o marcador a zero. De cada vez que se carregar na tecla de recalcular (F9), o algoritmo produz uma iteração. Umas poucas iterações são suficientes para atingir a convergência. Este processo é ilustrado pela figura 10.

O YTM foi portanto estimado em 5,49%. O algoritmo aqui descrito limitou-se a equilibrar uma das parcelas da equação com as restantes. De um lado, tem-se o registo IRR que tenta achar um r capaz de anular a equação

$$-\text{CASH AJUSTADO } + \sum_{t=1}^{4} \frac{5}{(1+r)^t} + \frac{105}{(1+r)^5}.$$

Do outro, o registo CASH AJUSTADO que calcula, como vimos, a parcela correspondente ao investimento inicial. Ao iterar, o valor de @IRR é levado a assumir valores que tornem mínimo ou mesmo anulem a diferença entre ambas as parcelas. Este valor será r, a raiz pretendida da equação acima.

2.6 Estratégias de Imunização

O valor de uma carteira de obrigações está sujeito a reflectir a estrutura das taxas de juro que estiverem a ser praticadas. Se fosse possível conseguir que uma carteira tivesse numa data futura o mesmo valor que tem agora, qualquer que fosse a estrutura das taxas de juro praticadas, então essa carteira poderia servir para imunizar contra futuros pagamentos.

Esta secção discute estratégias de imunização, destinadas a atingir tal objectivo. A imunização é um conceito extraido do de duração. Existem tantos conceitos de imunização quantos os de duração, mas este capítulo apenas estuda o mais simples, o de Macauley (ver, para mais detalhes Weil (1973) [15]).

28. Algumas fórmulas: Considere-se a seguinte situação: uma empresa tem que satisfazer uma obrigação futura P. O valor descontado desta obrigação é

$$V_0 = \frac{P}{(1+r)^N}$$

onde r é uma taxa apropriada. Entretanto, a empresa é detentora de um activo, B, cujo valor, V_B é igual ao valor descontado da obrigação futura. Se o caudal de pagamentos previstos para B for $P_1, \cdots, P_M$, o valor actual líquido desse bem será

$$V_B = \sum_{t=1}^{M} \frac{P_t}{(1+r)^t}$$

Agora suponha-se que r sofre uma mudança. Usando uma aproximação de primeira ordem é posível ver-se que o novo valor da obrigação futura viria dado por

$$V_0 + dV_0 = V_0 + \Delta r \left[\frac{-N\ P}{(1+r)^{N+1}} \right]$$

Por outro lado, o novo valor do bem B seria dado, sob as mesmas hipóteses, por uma expressão do tipo

$$V_B + dV_B = V_B + \Delta r \left[\sum_{t=1}^{M} \frac{-tP_t}{(1+r)^{t+1}} \right]$$

Se os dois valores acima fossem iguais, uma mudança em r não iria afectar as propriedades protectoras da carteira que contém os bens desta empresa. Obrigue-se portanto $V_0 + dV_0$ a ser igual a $V_B + dV_b$. Isto produz a condição

$$V_0 + \Delta r \left[\frac{-N\ P}{(1+r)^{N+1}} \right] = V_B + \Delta r \left[\sum_{t=1}^{M} \frac{-tP_t}{(1+r)^{t+1}} \right]$$

que consiste, funcionalmente, em obrigar ao emparelhamento ou igualdade das mudanças em valor observadas em ambos os activos. Isto é, as primeiras derivadas de ambos os valores em causa ficam obrigadas a serem iguais. Recordando agora que

$$V_B = V_0 = \frac{P}{(1+r)^N}$$

é fácil ver que a igualdade acima conduz à condição

$$\frac{1}{V_B}\sum_{t=1}^{M}\frac{-tP_t}{(1+r)^t} = N \tag{8}$$

Note-se a semelhança desta equação com a definição de duração (5). O que se conclui daqui é que, quando a duração de um activo é igual ao número N de períodos até à data de cumprir a obrigação, e desde que se aceite uma aproximação de primeira ordem para as variações de r, o activo pode realmente garantir este pagamento futuro.

29 Suponha-se que a estrutura das taxas de juro é uniforme: a taxa à qual os meios libertos no futuro vão ser descontados é a mesma, qualquer que seja o número de períodos que decorram entre o presente e as datas de maturidade. Nesse caso, uma condição necessária e suficiente para que a cotação no mercado do activo B seja igual — apesar das mudanças verificadas em r — à cotação no mercado de uma obrigação futura, P, é que *a duração do activo seja igual à duração da obrigação futura*. Aqui, entenda-se a palavra *igual* no sentido de uma aproximação de primeira ordem.

Pois bem, diz-se de uma obrigação com a qual o activo referido foi emparelhado desta forma, que está *imunizada*.

30 O desenvolvimento apresentado acima tem duas limitações. A primeira é bastante crítica e a segunda parece ter menos importância. Ei-las:

1. O tipo de imunização discutido só é válido quando uma aproximação de primeira ordem for aceitável. No exemplo que se apresentará a seguir, ver-se-á que tal aproximação pode ser grosseira.

2. Assumiu-se também que a curva do ganho r era uniforme. Isto constitui uma aproximação pobre da realidade. Porém, curiosamente, essa aproximação não parece afectar muito a precisão da técnica explicada acima.

Teorias mais elaboradas, capazes de contemplar estruturas da taxa de juro não-uniformes, conduzem a difinições alternativas de duração e de imunização (ver Bierwag *et al.* 1981 e

1983 [3], [4] e também Cox, Ingersoll e Ross 1979 [7]). Porém, num estudo empírico destas alternativas, Gulterkin & Rogalsky (1984) [8] mostraram que o conceito simples de duração aqui usado funciona tão bem, e possivelmente melhor, do que esses outros mais elaborados.

2.6.1 Um Exemplo

Está-se a tentar imunizar uma obrigação a satisfazer dentro de 10 anos e cujo valor actual é mil dólares. Neste momento a taxa de juro é de 6% e portanto a obrigação a satisfazer é no montante de 1790,85 dólares. Pretende-se conseguir a imunização comprando mil dólares em papeis obrigacionistas (*bonds*) ou combinações de bonds.

31 Consideram-se três possíveis candidatas: uma bond com 10 anos até à maturidade, com cupões que pagam 6,7% e valor facial de mil; uma outra com 15 anos até à maturidade, com o mesmo valor facial e cujos cupões pagam 6,988%; ou então uma terceira bond com 30 anos até à maturidade, o mesmo valor facial e cujos cupões pagam 5,9%.

À taxa de 6% as cotações destas três bonds diferem, de modo a apresentarem o mesmo YTM. Como a primeira delas custa 1051,52, basta comprar uma proporção de 0,951 do seu valor facial (951 dólares) para ter os mil dólares desta bond. O mesmo raciocínio aplicado às restantes bonds conduz ao quadro seguinte:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3
Cotacao hoje	1051.52	1095.96	986.24
proporcao	0.9510	0.9124	1.0140
Cupao	67	69.88	59
Duracao	7.66	10.00	14.63

Se a taxa de juro permanecer constante, é possível re-investir cada cupão e ganhar 6%. Passados 10 anos de reinvestimento dos cupões a bond 2 teria libertado

$$\sum_{t=0}^{9} 69,88 \times (1+0,06)^t + \left[\sum_{t=1}^{5} \frac{69,88}{(1+0,06)^t} + \frac{1000}{(1+0,06)^5}\right] = 921,07 + 1041,62 = 1962,69$$

A primeira parcela é o que se ganha com os cupões re-investidos. A segunda e terceira parcelas representam o valor da bond no ano 10, quando ela tem ainda cinco anos pela frente até atingir a maturidade. Como a proporção a comprar é apenas 0,912, ter-se-á, no fim destes dez anos, apenas $0,912 \times 1962,69 = 1790,84$. Assim, conseguiu-se o que se procurava: ter, passados dez anos, a possibilidade de cumprir com uma obrigação no montante de 1790,85 (com um erro de arredondamento de 0,01 dólares).

32 Podem representar-se os resultados acima para as três bonds que se estão a estudar:

		Bond 1	Bond 2	Bond 3	
	Duracao	7.66	10.00	14.63	
	Proporcao	0.951	0.912	1.014	fixas
	Faltam	0	5	20	anos
	Preco	1000.00	1041.62	988.53	
	Cupoes reinv	883.11	921.07	777.67	
	Lucro Total	1883.11	1962.69	1766.20	
A satisfazer:	Total * Prop	1790.85	1790.85	1790.85	

Como se vê, as proporções de cada bond foram calculadas de modo a que qualquer delas imuniza a empresa contra a obrigação referida. Comprando agora mil dólares de qualquer delas ter-se-á, dentro de dez anos, a possibilidade de fazer face a uma obrigação no montante de 1790,85. Isto, *caso a taxa de juro, e portanto o YTM destas bonds, não varie.*

33 Suponha-se porém que, imediatamente depois da compra de mil dólares de uma destas bonds, a taxa de juro muda para um novo valor e permanece aí. Isso iria afectar os cálculos acima. Por exemplo, se a taxa cair para 5%, ter-se-á:

		Bond 1	Bond 2	Bond 3	
	Duracao	7.66	10.00	14.63	
	Proporcao	0.951	0.912	1.014	fixas
	Faltam	0	5	20	anos
	Preco	1000.00	1086.07	1112.16	
	Cupoes reinv	842.72	878.94	742.10	
	Total	1842.72	1965.01	1854.26	
A satisfazer:	Total * Prop	1752.43	1792.97	1880.14	

34 Note-se agora que as bonds 1 e 3 não cumprem com a sua obrigação. Porém, a capacidade da bond 2 para cobrir a obrigação quase não foi afectada por possíveis variações no seu YTM. A explicação para isso está no facto da duração desta bond coincidir com o tempo até à obrigação ter de ser cumprida e no que foi dito a propósito da fórmula (8) da secção precedente.

Repetindo-se os cálculos acima para uma colecção de possíveis taxas de juro, os resultados seriam os que se podem ver sob forma gráfica na figura 11. Nota-se de novo que a capacidade da bond 2 para garantir o cumprimento da obrigação quase não é afectada por

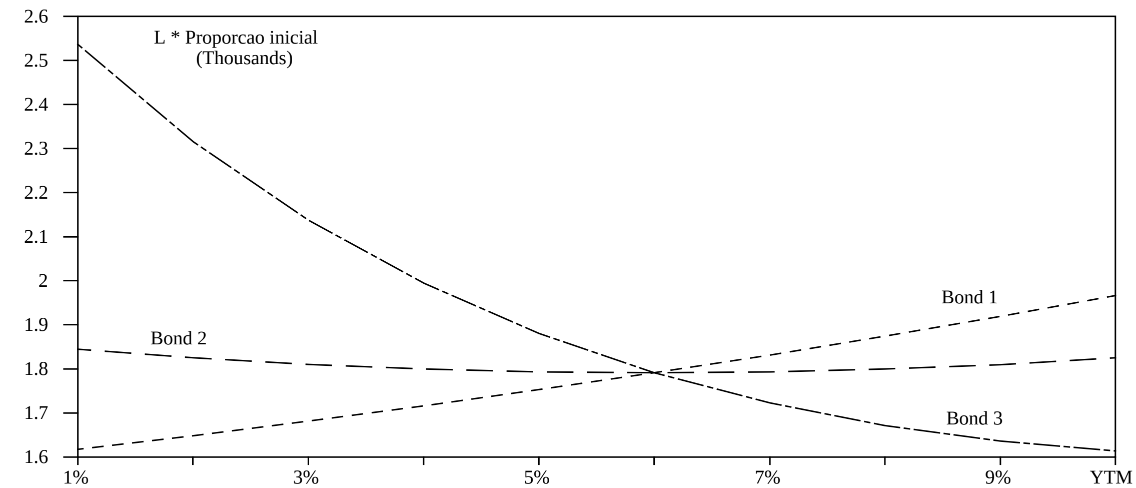

Figura 11: Variação do lucro total obtido com três bonds quando o YTM (eixo dos X) oscila em torno dos 6% iniciais. A bond 2 é a que assegura maior imunização.

mudanças no seu ganho até à maturidade. Ora é esta a qualidade que se procura quando se fala de *imunizar*.

2.6.2 Imunização com Carteiras de Bonds

Existe uma maneira expedita de se conseguir um investimento em bonds com uma duração de 10. Consiste ela em criar carteiras de bonds cuja duração foi calculada de tal forma que a sua duração é a desejada. A duração de uma carteira de bonds é a média ponderada das durações dos seus componentes. Portanto, para se conseguir uma dada duração basta determinar quais as proporções que a ela conduzem e depois construir uma carteira com essas proporções.

35 No exemplo acima, quem investisse 655,091 dólares na bond 1 e mais 344,909 na 2, obteria uma carteira com a duração de 10. Os seguintes números são fáceis de obter:

		Bond 1	Bond 3	Carteira
	Duracao	7.665	14.636	10
	Proporcao	0.665	0.335	
A satisfazer:	Total * Prop	1790.85	1790.85	1790.85

Aqui, o valor de 10 anos é um dado. As proporções de cada bond na carteira deduzem-se deste dado e da duração de cada uma. Depois, estas proporções usam-se para calcular o lucro da carteira.

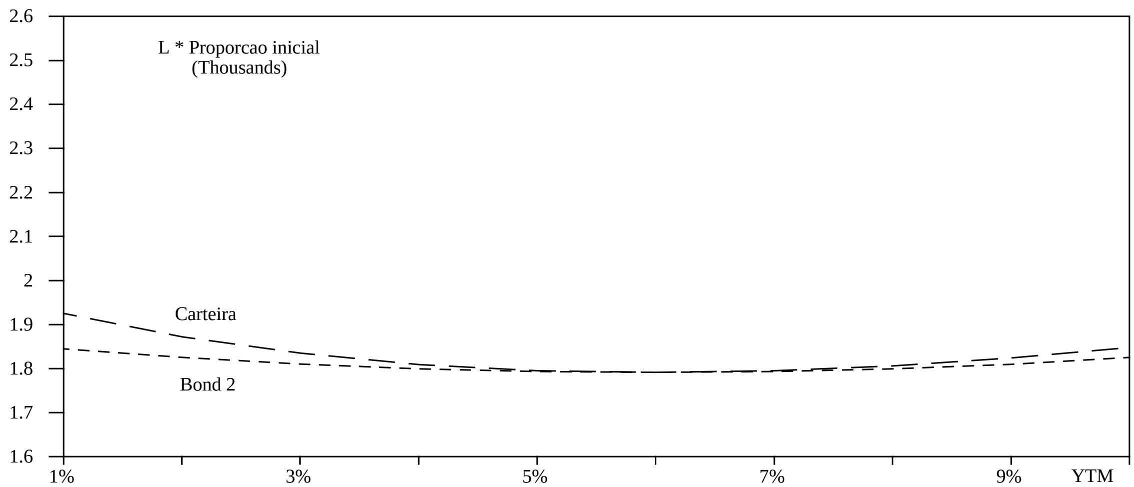

Figura 12: Variação do lucro total obtido com a bond 2 (a ponteado) e com uma carteira com as bonds 1 e 2 (a tracejado) quando o YTM (eixo dos X) oscila em torno de 6%. A carteira assegura uma imunização mais convexa.

Repetindo agora a análise da sensibilidade dos meios libertos pela carteira a oscilações em torno de uma taxa de 6%, pode obter-se uma tabela com o aspecto gráfico que a figura 12 ilustra.

36. Interesse da convexidade: Note-se que, na figura 12, a convexidade conseguida com a carteira de duas bonds é maior do que aquela que se obtém só com a bond 2. Isto é uma regra geral: A convexidade de uma carteira pode fazer-se maior do que a das bonds individuais.

Nem é preciso dizer que a convexidade é uma característica desejável em imunização, já que fornece uma protecção extra qualquer que seja a oscilação sofrida pelo YTM. Ao compararem-se duas carteiras de bonds, é preferível aquela que for mais convexa.

2.6.3 A Imunização de Segunda Ordem

Apesar do que foi dito sobre o interesse da convexidade, convém, em alguns casos, calcular as proporções que, numa carteira de bonds, a tornam tão insensíveis quanto possível a oscilações na estrutura temporal das taxas de juro. Uma maneira de melhorar esta característica de uma carteira consiste em, não apenas emparelhar as primeiras derivadas da mudança em valor com o tempo — o que, como se viu atrás, conduz ao conceito de duração —, mas também emparelhar as segundas derivadas.

Uma extensão da análise feita na secção 2.6 levaria à conclusão de que o emparelhamento das segundas derivadas requér o cumprimento da condição

$$N(N+1) = \frac{1}{V_B} \sum_{t=1}^{M} \frac{t(t+1)P_t}{(1+r)^t} \tag{9}$$

Esta nova condição é a que deveria agora funcionar — junto com a duração ou aproximação de primeira ordem — para calcular, nos exemplos anteriores ou outras aplicações práticas, as proporções de cada bond que, numa carteira, seriam capazes de conseguir uma imunização uniforme.

É fácil introduzir tal condição extra. Mostra-se a seguir uma folha de cálculo capaz de determinar quais as proporções de três bonds capazes de assegurarem tanto a imunização de primeira como a de segunda ordem. O problema a resolver é apenas descobrir qual a carteira (proporções) cuja primeira e segunda derivadas do seu valor actual iguala o da obrigação a satisfazer dentro de 10 anos.

```
Obrigacao a imunizar: Dentro de           10  anos
                      Valor actual e'    1000
                      Taxa de juro          6%
                      Portanto,       1790.85  e' seu o valor futuro.
```

Encontram-se disponíveis três bonds para resolver o problema e mais uma quarta para comparar desempenhos. Esta quarta bond é uma bond óptima para efeitos de imunização, quando se considera apenas a primeira derivada. Tal como no exercício anterior, ter-se-á:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3	Bond 4
Preco	827.95	767.63	1368.00	1095.96
Proporcao	1.21	1.30	0.73	0.91
YTM	0.06	0.06	0.06	0.06
Maturidade	20	14	10	15
Cupao	45	35	110	69.88
Valor Facial	1000	1000	1000	1000

Calculo da duracao pela formula de Chua:

parcela 1	4441.51	2135.27	4065.86	4700.60
parcela 2	6236.09	6192.21	5583.94	6258.97

Desta vez o problema de determinar as três proporções requer a resolução simultênea de um sistema de três equações a três incógnitas. As incógnitas são, naturalmente, as proporções; quanto às equações, as duas primeiras são as que igualam as primeiras e segundas derivada ao número de anos (neste caso 10) e a $10 \times (10+1)$ respectivamente. A terceira equação é a que estabelece que a soma das três proporções a obter seja igual à unidade.

Ficará portanto:

	Matriz a inverter (A):		
duracao	12.8964	10.8483	7.053934
segunda derivada	229.087	148.702	67.59801
props somam 1	1	1	1

	Matriz inversa (A^-1):			Y:	A^-1 * Y:	
X = A^-1 * Y	-0.5838	0.02731	2.272031	10	-56.19%	Prop. Bond 1
	1.16254	-0.0420	-5.35738	110	164.15%	Prop. Bond 2
	-0.5786	0.01474	4.085349	1	-7.97%	Prop. Bond 3

O resultado é pois a colecção de proporções acima. Como já se viu, proporções negativas indicam *short sale*. No final dos dez anos, e a manter-se uma taxa de juro de 6%, ter-se-á:

	Bond 1	Bond 2	Bond 3	Bond 4	
Preco da bond	889.598	913.372	1000	1041.61	
Cupoes re-investidos	593.135	461.327	1449.887	921.073	
TOTAL	1482.73	1374.70	2449.887	1962.69	Carteira:
total * proporcao	1790.84	1790.84	1790.847	1790.84	1790.84

37 Uma simples análise de sensibilidade mostra o efeito deste tipo de imunização de ordem elevada. O gráfico da figura 13 compara a variação dos meios libertos totais obtida com a bond 4 com o da carteira de três bonds quando o YTM oscila em torno de 6%. A carteira assegura uma imunização mais aproximada, embora menos convexa.

2.7 Exercícios

38. Qual o efeito, na duração de uma bond, de um aumento no que um cupão paga? Supôr que o *yield to maturity* da bond não mudou.

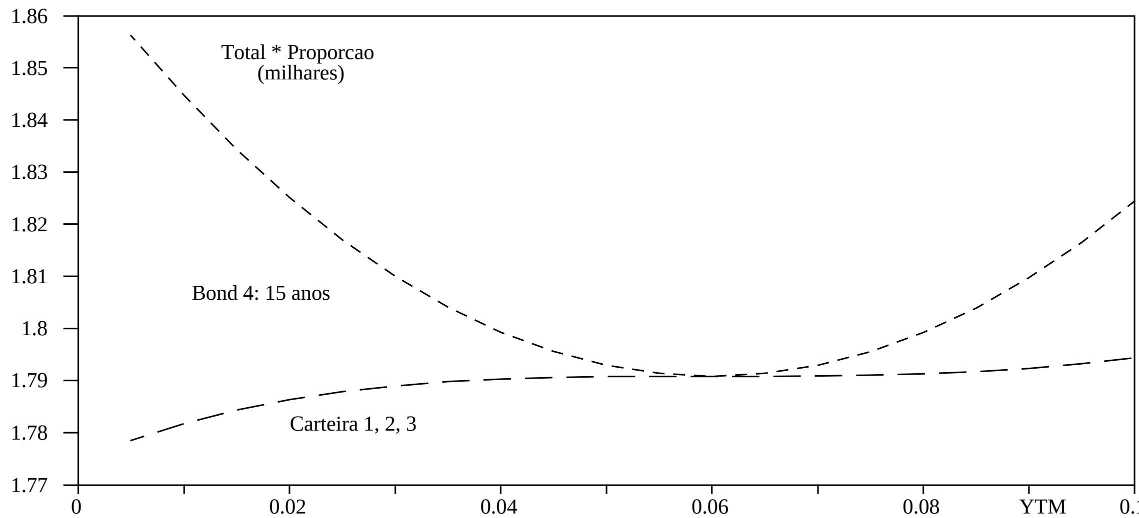

Figura 13: Imunização com aproximação até à segunda derivada. Lucro obtido com bond 4 (ponteado); carteira de bonds (tracejado).

39. "A duração pode ser vista como uma medida do risco de uma bond. Quando tudo o resto é igual, quanto maior o risco, menor a sua duração". Verificar esta afirmação por meio de um exemplo concreto. Qual é a lógica económica que suporta tal afirmação?

40. Uma *pure discount bond* é a que apenas paga o reembolso do investimento e os juros, tudo na mesma altura. Qual seria a duração de uma tal bond?

41. No dia 23 de Janeiro de 1987 a cotação de uma West Jefferson Development Bond era 1.122,32 dólares. Esta bond paga 59 dólares cada 1 de Março e de Outubro até 1993. No dia 1 de Outubro de 1993 a bond é resgatada ao valor facial de mil dólares. Calcular o ganho até à maturidade, YTM, desta bond e depois a sua duração.

42. Uma sequência de bonds $i, i = 1, 2, 3, \cdots$ têm todas a mesma maturidade N, o mesmo $TYM = r$, mas cada uma tem um diferente cupão C_i. Mostrar, usando a fórmula de Babcock, que a duração destas bonds pode escrever-se $D_i = N - KC_i$ onde $K = N - (1 - r)$ PV. Usar o 123 para produzir um gráfico da variação de D_i com diversos C_i.

Bibliografia

[1] G. Babcock. Duration as a weighted average of two factors. *Financial Analysts Journal*, pages 75–76, March-April 1985.

[2] S. Benninga. *Numerical Techniques in Finance*. The MIT Press, Cambridge, Mass. U.S., 1989.

[3] G. Bierwag and *alt.* The art of risk management in bond portfolios. *Journal of Portfolio Management*, pages 27–36, Spring 1981.

[4] G. Bierwag and *alt.* Duration: Its development and use in bond portfolio management. *Financial Analysts Journal*, pages 15–35, July-August 1983.

[5] J. Chua. A closed form formula for calcuating bond duration. *Financial Analysts Journal*, pages 76–78, May-June 1984.

[6] T. Copeland and J. Weston. A note on the evaluation of cancelable operating leases. *Financial Management*, pages 68–72, summer 1982.

[7] J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. Duration and the measurement of bond risk. *Journal of Business*, pages 51–61, January 1979.

[8] B. Gulterkin and J. Rogalski. Alternative duration specifications and the measurement of basis risk: Empirical tests. *Journal of Business*, pages 241–264, April 1984.

[9] H. Levy and M. Sarnat. On leasing, borrowing and financial risk. *Financial Management*, winter 1979.

[10] J. McConnell and Schallheim S. Valuation of asset leasing contracts. *Journal of Financial Economics*, 12:237–261, August 1963.

[11] J. Nelson and S. Schaefer. The dynamics of the term structure and alternative portfolio immunization stratergies. In G. Kaufman, G. Byerwag, and A. Toevs, editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization.* JAI, Greenwich, Conn., 1983.

[12] A. Ofer. The evaluation of leases versus purchase alternatives. *Financial Management*, pages 67–74, summer 1976.

[13] Brealey R. and Myers S. *Principles of Corporate Finance.* McGraw-Hill Book Co., fourth edition, 1981.

[14] M. Schlosser. *Corporate Finance: A Model Building Approach.* Prentice Hall, New York, 1989.

[15] R. Weil. Macauley's duration: An appreciation. *Journal of Business*, pages 589–592, October 1973.