Volatilidade implícita no preço de opções: exemplo de aplicação de métodos iterativos

Duarte Trigueiros

ISCTE - MSIAD

Nota de apresentação

Este texto não dispensa uma certa familiarização com opções financeiras. Quem desejar obtê-la pode recorrer a textos como Jarrow & Rudd (1983) [4]. Também recomendáveis são os artigos de Black (1985) [1] e de Black & Scholes (1972) [2] e (1973) [3] entre outros.

Uma *opção sobre um activo* é o direito de comprar ou vender uma porção desse activo antes ou até uma data determinada, por um preço pré-estabelecido. As opções são, elas próprias, activos cujo valor está subordinado ao valor de outros activos. Existem muitos tipos de activos cujo valor está subordinado ao de outros activos; aquilo que distingue uma opção é ser um direito (de comprar ou vender) sem a contrapartida do respectivo dever.

A noção de opção é básica em Finanças. Tão básica como a fórmula para a actualização de *cash-flows*. De facto, a receita habitual que se usa para calcular o valor actual de um activo não é geral. Por exemplo, o cálculo do preço de uma opção mostra a forma correcta de achar o valor actual de um activo que consista no direito a atrazar uma decisão de compra ou venda.

Segue-se um glossário de termos e notações usados no texto.

Call: Uma opção que dá ao seu detentor o direito de comprar uma porção de um activo.

Put: Uma opção que dá ao seu detentor o direito de vender uma porção de um activo.

Preço no Exercício, K: O preço ao qual o detentor de uma opção fica com direito a comprar ou vender cada porção de um activo.

Data de Expiração, T: A data à qual (ou antes da qual) o detentor de uma opção pode exercer o seu direito de compra ou venda.

Cotação do Activo, S_t: O preço ao qual o activo em questão está a ser vendido na data t, i.e., aquando da compra da opção.

Preço da Opção: O preço ao qual a opção é transaccionada.

Usar-se-á a notação C_t para denotar o preço de uma Call na data t. P_t será o preço de uma Put. Quando se tornar conveniente uma notação mais específica usar-se-á $C_t(S_t, K, T)$ para denotar o preço de uma Call à data t, com cotação actual do activo de S_t, um preço no exercício de K, e uma data de expiração T. O tempo até ao exercício é $\tau = T - t$. Uma porção de um activo chama-se "activo". A menor porção de um activo que pode ser transaccionada é uma "acção" ou *share*.

Nos mercados de opções, a porção do activo que constitui a unidade mínima transaccionável é fixa. Além disso, a data de expiração é a mesma para todas as transações: Tipicamente, na terceira sexta-feira do mês.

Existem dois tipos de opções: As *americanas*, que podem ser exercidas em qualquer altura até à data de expiração, e as *europeias*, que só podem ser exercidas na data de expiração. Esta designação não tem nada a ver com o continente onde se situa o mercado: Opções europeias são frequentemente transaccionadas em Chicago, embora, em geral, as opções americanas sejam as mais populares tanto neste como no outro lado do oceano.

O comprador de uma Call adquire o direito de comprar uma porção do activo a um preço combinado com antecedência e paga por esse direito na altura de o comprar. Diz-se, daquele que vende tal direito, que *escreve* uma Call. O que escreve, recebe hoje, t, o preço da opção, e fica obrigado a vender uma porção do activo no futuro, T, a um preço pre-determinado, caso o detentor da Call assim o exigir. Em termos de cash-flows, quem compra uma opção tem sempre um outflow inicial (o preço da opção), e um inflow futuro que será, na pior das hipóteses, nulo (isto dá-se quando não vale a pena exercer a opção). Quanto a quem escreve, a sua posição inicial é um inflow ao qual se segue um outflow — o qual, na melhor das hipóteses será nulo. Estas duas posições são simétricas.

Exemplo: Uma "IBM September 50 call option" é um bem que dá ao seu detentor o direito de comprar uma porção fixa da empresa IBM até à terceira sexta-feira de Setembro, ao preço de 50 dolares. Se o preço, hoje, de esse direito fôr 4 dólares, pode conseguir-se por 4 dólares o direito de comprar, entre hoje e a terceira sexta-feira de Setembro, uma dada porção da IBM a 50 dólares cada acção, por mais alta que seja a sua cotação.

Capítulo 1

O preço das opções

Uma das qualidades atractivas das opções é a de permitirem aos seus detentores a possibilidade de modificarem os padrões de lucro associados aos respectivos activos.

1.1 Padrões de Lucro à Data de Expiração

Vão-se agora estudar alguns destes padrões, começando pelos três mais simples.

1. Compra de activo: Suponha-se que se compra uma porção de IBM's em Julho, ao preço de 50 dólares cada acção. Se, em Setembro, a cotação deste activo é 70, ter-se-á feito um lucro de 20. Se é 40, ter-se-á perdido 10. Sendo S_T a cotação do activo em Setembro e S_0 a sua cotação em Julho, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será:

$$\text{Lucro, activo} = S_T - S_0$$

Portanto, o padrão de lucro resultante da posse de activo é, quando expresso em função de S_0, uma simples réplica de S_0, deslocada de S_T. A figura 1 compara este padrão com outros que se estudam a seguir.

2. Compra de Call: Por outro lado, se em Julho se tiver comprado uma IBM September 50 call por 4 dólares, isto torna possível exercê-la caso a cotação das IBM seja, em Setembro, superior a 50 dólares. Sendo C_0 o preço desta Call, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será agora:

$$\text{Lucro, Call} = \max(0, S_T - K) - C_0 = \max(0, S_T - 50) - 4 = \begin{cases} -4 & \text{se} \quad S_T \leq 50 \\ S_T - 54 & \text{se} \quad S_T > 50 \end{cases}$$

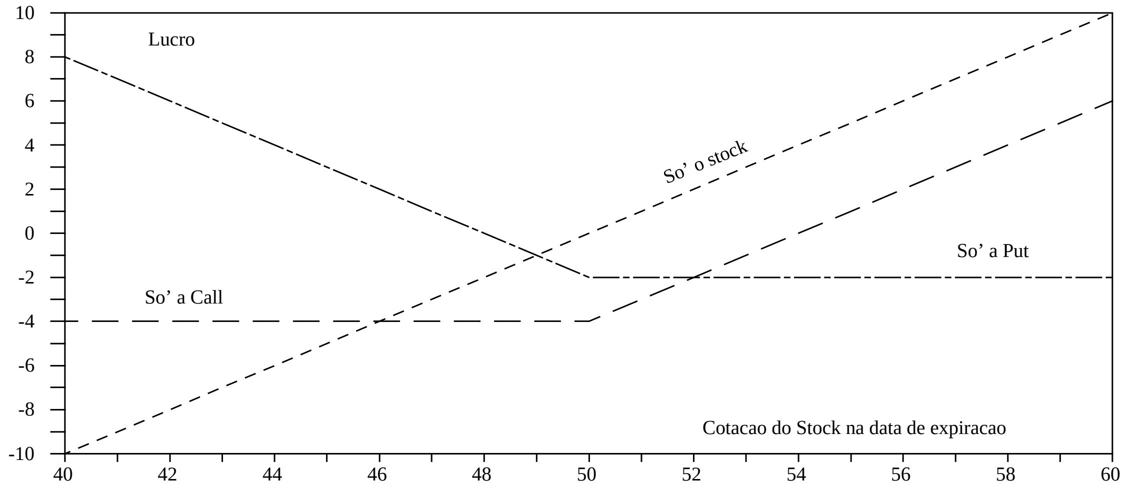

Figura 1: Os três mais simples padrões de lucro em função de diversos possíveis valores futuros de um activo: Compra de activo, compra de Call, compra de Put.

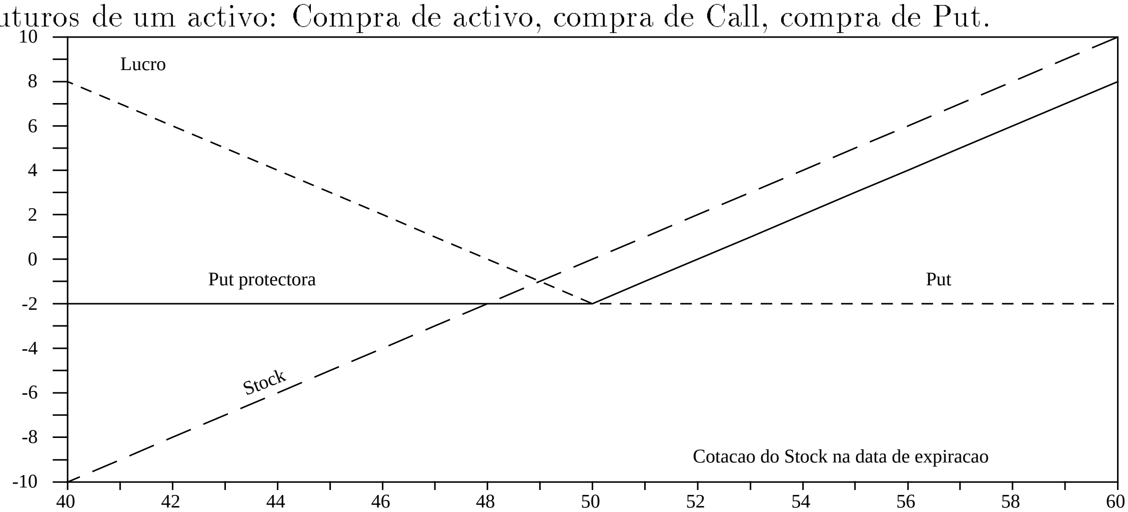

Figura 2: Padrão de lucro de uma Call protectora em função de diversos possíveis valores futuros de um activo.

Note-se que o uso da palavra *lucro* neste contexto é inadequado uma vez que se ignoram os juros associados com a compra do activo. No caso presente isto é tanto tradicional como inofensivo. A figura 1 compara este padrão com outros também muito simples.

3. Compra de Put: Se em Julho se tiver comprado uma IBM September 50 put por 2 dólares, caso a cotação das IBM seja, em Setembro, inferior a 50 dólares, seria interessante exercê-la. Sendo P_0 o preço desta Put, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será:

$$\text{Lucro, Put} = \max(0, K - S_T) - P_0 = \max(0, 50 - S_T) - 2 = \begin{cases} 48 - S_T & \text{se} \quad S_T \leq 50 \\ -2 & \text{se} \quad S_T > 50 \end{cases}$$

O aspecto gráfico dos três padrões básicos descritos até aqui podem observar-se na figura 1.

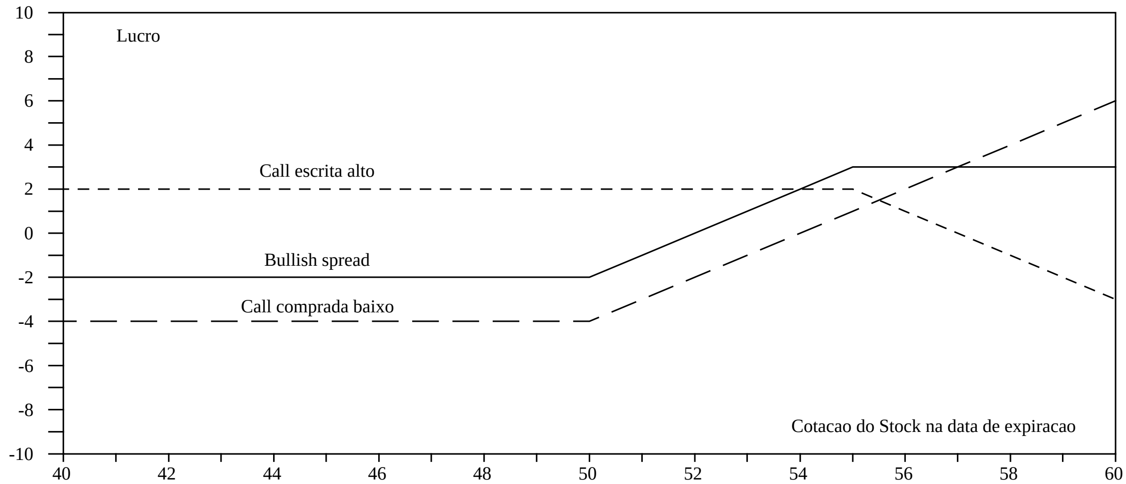

Figura 3: Padrão de lucro do bullish spread em função de diversos possíveis valores futuros de um activo.

4. Compra de activo e Put sobre esse activo: Suponha-se agora que se comprava activo da IBM por 50 dólares e ao mesmo tempo uma Put sobre esse activo, com um preço no exercício de também 50 dólares. Esta combinação de activos é conhecida pelo nome de *Put protectora* ou *seguro* de uma carteira. Sendo de 2 dólares o preço desta Put, o lucro em função da cotação do activo em Setembro será:

$$\text{Lucro, activo + Put} = S_T - 50 + \max(50 - S_T, 0) - 2 = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad S_T \leq 50 \\ S_T - 50 - 2 & \text{se} \quad S_T > 50 \end{cases}$$

Portanto, esta combinação de activo com Put oferece uma protecção contra descidas na cotação do activo, limitando as perdas máximas ao preço da Put. Graficamente, ter-se-ia o padrão de lucros que a figura 2 ilustra. O lucro com a Put protectora é a soma dos lucros com o activo e a Put.

5. Spreads: Compra e escrita simultânea de Calls: Outra possível combinação de activos consiste em comprar e, ao mesmo tempo, escrever Calls com diferentes preços de exercício. Quando a Call que é comprada tem um preço de exercício inferior à Call escrita, a combinação assim conseguida chama-se uma *bullish spread*. Por exemplo, suponha-se que se compra uma Call por 4 dólares com um preço no exercício de 50. Ao mesmo tempo, escreveu-se uma Call por 2 dólares com o preço no exercício de 55. Este bullish spread dará um lucro de

$$\text{Lucro, Bullish spread} = \max(S_T - 50, 0) - 4 + 2 - \max(S_T - 55, 0)$$

o que vem a ser:

$$\text{Lucro, Bullish spread} = \begin{cases} -2 & \text{se } S_T \leq 50 \\ S_T - 50 - 2 & \text{se } 50 < S_T < 55 \\ 3 & \text{se } S_T \geq 55 \end{cases}$$

Graficamente, ter-se-ia o padrão de lucros que a figura 3 mostra. O lucro é a soma dos dois padrões obtidos com o comprar e o escrever Calls. Quando a tendência do mercado é para subir, o bullish spread oferece prespectivas de lucros.

Muitos outros exemplos de combinações seriam possíveis. Falar-se-á de alguns deles na secção dos exercícios.

1.2 Os Factores que Influenciam o Preço das Opções

Quanto deveria ser pago hoje pelo direito de comprar activo no futuro por um preço fixo? O preço de uma Call vem determinado por diversos factores e existe até uma resposta analítica para tal questão. De momento interessa explorar o aspecto empírico e ganhar sensibilidade para a forma como diversos possíveis factores influenciam tal preço.

6 Os factores que influenciam o preço a pagar por uma Call com preço K no exercício e data de expiração T, escrita sobre um activo cuja cotação hoje é S_t, seriam:

- O preço no exercício da opção, K. Obviamente, quanto mais elevado é o preço no exercício, se tudo o resto permanecer constante, menos provável é que a Call venha a ser exercida. Por isso, quanto maior K, menor o preço da Call.

- A cotação actual do activo, S_t. Quando tudo o resto permanece constante, quanto maior fôr a corrente cotação do activo sobre o qual a Call é escrita, tanto mais vale esta opção de comprar tal activo. Isto, porque a probabilidade de a cotação ser suficientemente elevada para valer a pena exercer a opção aumenta com essa cotação.

- O tempo que resta até ao exercício, $\tau = T - t$. Quanto mais tempo se tem para exercer uma opção, mais provável se torna o seu exercício.

- A volatilidade do activo. Tudo o mais sendo igual, um activo muito volátil aumenta a probabilidade de que em algum momento valha a pena exercer a opção de comprá-lo. Em geral, a volatilidade dos activos diminui o seu preço. Com as Call passa-se o contrário. Uma Call protege o seu detentor contra os movimentos descendentes das cotações. Por isso, um detentor de uma Call só estará interessado nos movimentos ascendentes da cotação.

Diz-se que uma opção está “junto ao dinheiro” ou *at the money* quando a cotação do respectivo activo se encontra próxima do preço no exercício K. Diz-se que uma opção está “no dinheiro” ou *in the money* quando a cotação do respectivo activo parece prometedora em termos de ela vir a ser exercida. Assim, no caso de uma Call, quando a cotação do activo é mais elevada do que K, essa Call está *in the money*. Diz-se que uma opção está “fora do dinheiro” ou *out of the money* quando a cotação do respectivo activo não é prometedora em termos de ela vir a ser exercida.

7 O valor *intrínseco* de uma opção é a diferença $S_t - K$ entre a cotação presente do activo, S_t, e o preço no exercício K. Se uma opção dá ao seu detentor o direito de comprar uma IBM a 65 dólares e hoje as IBM estão a 70 dólares, o valor intrínseco desta opção é cinco dólares. Naturalmente, só opções que estejam *in the money* têm valor intrínseco. Quando a opção fica *out of the money* o seu valor intrínseco torna-se negativo. Mas isto não significa que uma opção que se encontre *out of the money* não tenha valor. O valor intrínseco é apenas uma das fontes de valor de uma opção. Para além dele, deve considerar-se o valor do tempo que resta até à expiração, o qual pode fazer com que a cotação do activo se torne favorável. O valor do tempo compõe-se, por sua vez, de duas parcelas:

Valor Temporal do Dinheiro: quanto mais tarde uma Call é exercida, mais tempo é possível deixar o dinheiro destinado à compra do activo a render. O valor temporal de um atrazo de τ no dispêndio de K é $K - Ke^{-r\tau} = K(1 - e^{-r\tau})$.

Valor próprio da Opção: o valor do direito a não comprar ou não vender activo pelo preço previamente combinado, K, caso a sua cotação na data do exercício não se mostre convidativa.

Estas três parcelas podem escrever-se

$$C_t = (S_t - K) + K(1 - e^{-r\tau}) + P_t \tag{1}$$

ou, simplificando,

$$C_t = S_t - Ke^{-r\tau} + P_t \tag{2}$$

onde P_t é o valor próprio da opção, também conhecido por *option feature*. À medida que se aproxima a data de expiração, o valor de uma opção que está *in the money* torna-se cada vez mais semelhante ao seu valor intrínseco $S_t - K$ pois o valor P_t próprio da opção e o valor temporal do dinheiro esvaem-se. Caso a opção esteja *out of the money*, o aproximar-se da data de expiração torna o valor da opção cada vez mais semelhante ao valor intrínseco subtraido do direito de não comprar activo — a *feature*.

8 Note-se que existem activos subordinados cujo valor se compõe apenas do valor intrínseco mais o valor temporal do dinheiro (os contratos *forward*, por exemplo). Aquilo que é específico das opções é o seu valor próprio (*feature*).

1.3 A Equação de Black-Scholes: O Preço de uma Opção

Baseados na impossibilidade de obter lucros a partir de uma carteira perfeitamente protegida contra variações na cotação de um activo, Black & Scholes (1973) [3] derivaram uma fórmula que pode ser usada para calcular o preço das Call europeias. Tal modelo assume que o activo sobre o qual a opção é escrita não paga dividendos e a volatilidade das cotações é multiplicativa, i.e., lognormal. Usar-se-á σ para designar a dispersão logarítmica do activo sobre o qual se escreve a opção. O valor esperado logarítmico do activo, μ, não tem qualquer papel na preçagem das opções.

Usar-se-á a mesma notação que até aqui. O tempo até à expiração, $T-t$, chamar-se-á τ. O ganho obtido com um activo livre de risco será r. Note-se que ambos r e τ devem estar expressos nas mesmas unidades de tempo, por exemplo, anos.

9 Black & Scholes mostraram que, dados certos pressupostos, o valor de uma Call teria que vir dado por

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \tag{3}$$

onde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\ \tau}{\sigma\ \sqrt{\tau}} \quad \text{e onde } d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\ \tau}{\sigma\ \sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\ \sqrt{\tau}$$

e que, quando tal não acontece, é possível construir carteiras sem risco mas com ganho esperado positivo. Como em outras ocasiões, $N()$ denota a distribuição Normal acumulada, disponível em muitas folhas de cálculo.

É facil de ver que a fórmula de Black-Scholes obedece aos requisitos enunciados acima quanto ao preço das opções. Nomeadamente,

- quando a volatilidade σ é nula, o preço de uma opção apenas expressa a diferença entre a cotação presente do activo e o valor actual do preço no exercício: os $N(d)$ igualam a unidade e portanto

$$C_t = S_t - K e^{-r\tau}$$

- à medida que se aproxima a data de expiração, o valor da opção vai-se aproximando do seu valor intrínseco.

O valor $N(d_1)$ é chamado "Delta" (Δ) e mede a sensibilidade do preço de uma opção a variações na cotação do activo. Qualquer investidor que tenha em seu poder uma proporção igual a $-\Delta$ de activo por cada opção que comprar sobre esse activo, deixará de estar exposto ao risco associado à volatilidade do activo. No fim de contas, o que a fórmula de Black & Scholes diz é que tal investidor deverá pagar pela compra dessas opções um montante tal que torne nulo o ganho obtido com essa posição, uma vez que ela está protegida contra o risco (diz-se de uma posição protegida contra o risco que está *hedged*).

10. Como usar a fórmula de Black & Scholes: Um exemplo. Considere-se uma Call com um preço no exercício de $K = 50$ escrita sobre um activo com $S_t = 50$. Suponha-se que o cotação desse activo é um processo lognormal com $\sigma = 0,35$. Se $r = 0,08$ e se $\tau = 0,25$ (portanto, aproximadamente três meses) ter-se-á:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 0,20178 \\
d_2 &= 0,02678 \\
N(d_1) &= 0,5800 \\
N(d_2) &= 0,5107 \\
\exp(-r\tau) &= 0,9802
\end{aligned}
$$

O que daria, segundo (3) um preço de

$$C_t = S_t N(d_1) - K\ e^{-r\tau} N(d_2) = 3,9693$$

para esta Call. Os números acima podem ser usados para testar a implementação da fórmula (4) em 123 ou outro ambiente.

1.4 A Paridade Call-Put

A fórmula de Black & Scholes pode ainda ser usada para achar o preço de Puts europeias. Isso deve-se à existência do *teorema da paridade Call-Put*, que mostra que uma Put europeia sobre um dado activo, com preço no exercício de K e data de expiração de T, é equivalente a uma carteira na qual se combinam três outros activos. Para verificar que isto é assim, construa-se a seguinte carteira:

1. Comprar uma Call sobre um activo, com um preço no exercício de K e data de expiração de T. Este activo terá hoje um cash-flow de $-C_t$ e um cash-flow de $+\max(S_t - K, 0)$ no exercício T.

2. Comprar hoje uma porção igual a $Ke^{-r\tau}$ do activo sem risco. Este terá um cash-flow inicial $-Ke^{-r\tau}$ e um cash-flow de $+K$ na data de expiração T.

3. Vender *curto* uma porção do activo sobre o qual a Call acima foi escrita. Esta venda origina um cash-flow de $+S_t$ à data t (hoje) e um outro de $-S_T$ à data de expiração da Call.

4. Escrever uma Put europeia sobre esse activo, com a mesma data de expiração e preço no exercício que a Call. Exta venda origina um cash-flow de $+P_t$ à data t (hoje) e um outro de $-\max(K - S_T, 0)$ à data de expiração T.

O cash-flow total gerado por esta carteira à data da expiração acaba por ser zero como é fácil de ver. De facto,

Cash-flows quando $S_T \leq K$	
Compra de Call	0
Activo sem risco	K
activo curto	$-S_T$
Escrita de Put	$-(K - S_T)$

Cash-flows quando $S_T \geq K$	
Compra de Call	$S_T - K$
Activo sem risco	K
activo curto	$-S_T$
Escrita de Put	0

Segue-se que o cash-flow total desta carteira à data t (hoje) tem que ser zero também. Se assim não fosse ela seria uma máquina de criar ou volatilizar dinheiro, o que só acontece nas casas moedeiras. Portanto, terá que verificar-se:

$$-C_t - Ke^{-r\tau} + S_t + P_t = 0 \quad \text{ou, por rearranjo,} \quad P_t = C_t - S_t + Ke^{-r\tau}.$$

É este o teorema da paridade Call-Put, cuja importância prática é enorme. Ele pode ser usado para tirar partido de oportunidades de arbitragem que surjem quando as opções estão a ser vendidas abaixo ou acima do seu valor teórico. Confrontando este teorema com a fórmula (2) vê-se a razão pela qual chamamos P_t à *option feature*. De facto, o direito a não comprar, no exercício, activo mais barato que a sua cotação, é igual ao direito de vende-lo.

11 Pode usar-se este teorema directamente com a equação de Black-Scholes para se obter a fórmula equivalente no caso das Puts:

$$P_t = -S_t N(-d_1) + Ke^{-r\tau} N(-d_2) \tag{4}$$

onde d_1 e d_2 são o mesmo que no caso das Call (3) e $N()$ é a distribuição Normal acumulada. Derivando em órdem a S_t ve-se que, no caso das Put, o *hedge ratio* ou Δ vale $N(d_1) - 1$.

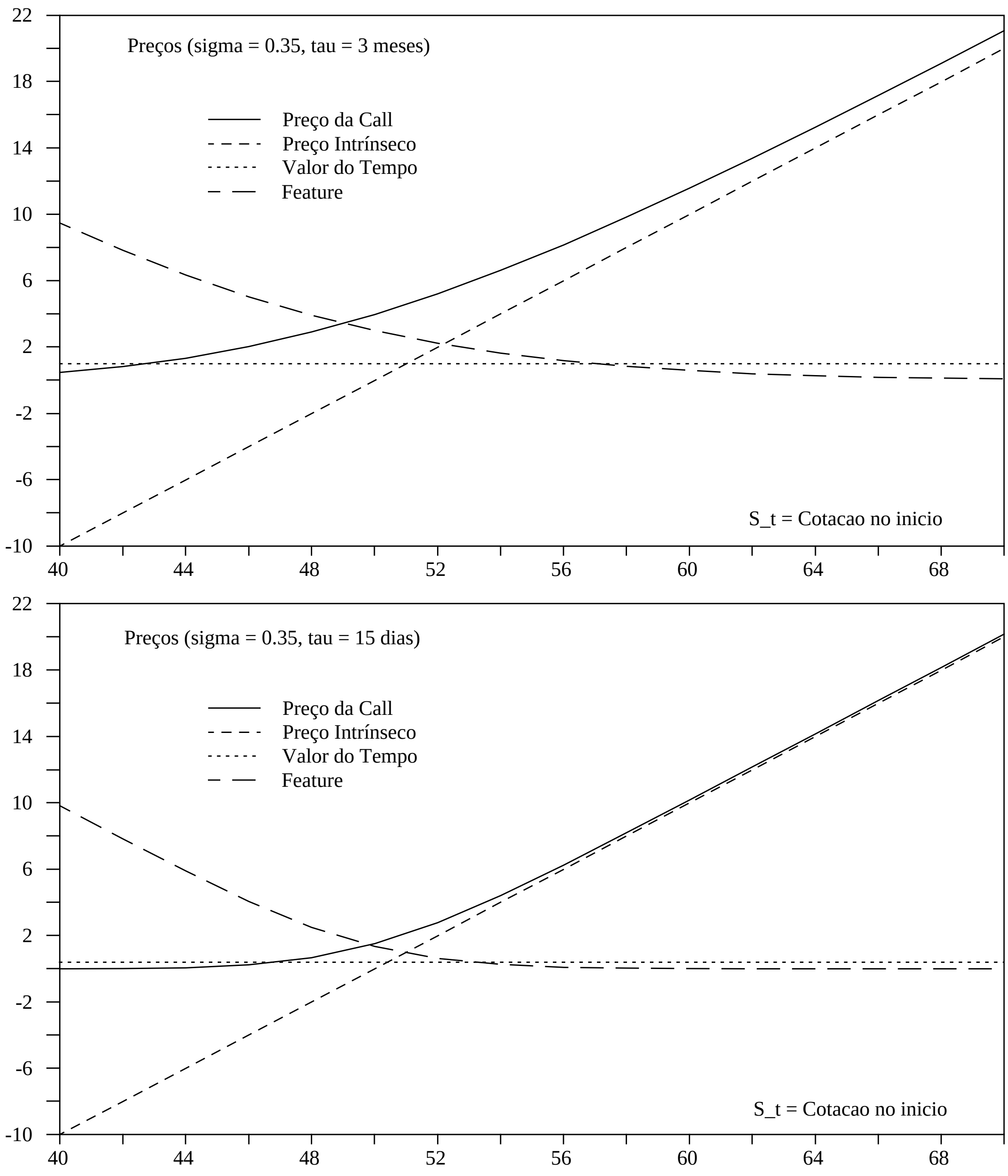

Figura 4: Padrão de lucro de uma Call (linha a cheio) e de cada um dos elementos de que se compõe o seu preço: o valor intrínseco, o valor temporal do dinheiro e a *option feature*.

Capítulo 2

A Estimação da Volatilidade Implícita Num Preço

De todas as variáveis requeridas pela equação de Black-Scholes para a determinação do preço de opções, a mais difícil de determinar é σ, o desvio-padrão do ganho logarítmico do activo. É costume tentar-se descobrir, dado o preço real de uma Call, qual é o σ que esse preço supôe existir no activo sobre o qual a Call foi escrita.

Não existe uma solução analítica para tal problema. A forma prática de estimar σ consiste em usar a equação de Black-Scholes iterativamente até à descoberta de uma solução. Existem várias maneiras de iterar. Aqui, usar-se-á uma delas, a de Newton-Raphson. Como exemplo desta técnica, o desenvolvimento seguinte é paradigmático.

O problema consiste em, dados os S_t, r, τ, K e C, o preço da Call, achar um σ tal que

$$f(\sigma) = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) = C$$

A solução obtém-se procurando iterativamente uma raiz da equação $C - f(\sigma) = 0$. A monotonicidade de f garante que existe apenas uma tal raiz. As iterações de Newton-Raphson substituem sucessivamente σ em

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{f(\sigma_i) - C}{f'(\sigma_i)} \tag{5}$$

onde $i+1$ indica a iteração seguinte. É importante começar a iterar com um σ inicial que conduza sempre à convergência. Manaster & Koehler (1982) [5] mostraram que um desses σ é dado por

$$\sigma^2 = \left| \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r\tau \right| \frac{2}{\tau} \tag{6}$$

Falta ainda determinar a derivada

$$f'(\sigma) = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}$$

C	Preço da Call	N'(D 1)	Derivada de $N(d_1)$
DERIV	Derivada $f'(\sigma)$	N(D 1)	Probabil. Acumulada
D 1	d_1	N(D 2)	Probabil. Acumulada
D 2	d_2	R	r, o ganho sem risco
EXP	$\exp(-r\tau)$	S	S_t, a cotação do activo em t
INIT	σ inicial	SIGMA	σ, a estimação pretendida
K	Preço no exercício	TARGET	Registo auxiliar
MARK	Marca ou *flag*	TAU	τ, o tempo até ao exercício

Tabela 1: Lista dos nomes de registos a definir na folha de cálculo capaz de estimar o σ subjacente a um dado preço, C de uma Call.

que não é de cálculo trivial. Pode porém ver-se (Jarrow & Rudd [4]) que

$$f'(\sigma) = S_t\sqrt{\tau}N'(d_1) \quad \text{e onde} \quad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \tag{7}$$

De posse de todos os elementos necessários à estimação de σ, pode passar-se à implementação do algoritmo de Newton-Raphson em folha de cálculo.

12. Implementação: Usar-se-á como ponto de partida a folha de cálculo onde se determinou $N(x)$, a função Probabilidade Gaussiana acumulada. Como é preciso achar o valor desta função para d_1 e d_2, conservar-se-ão dois registos para este efeito.

Os nomes dos registos usados neste exemplo constam da tabela 1. O registo MARK inicia o processo de estimação do σ subjacente a um dado C. Quando este registo é diferente de zero, a folha de cálculo determina INIT, o valor de σ recomendável para iniciar as iterações. Isto consegue-se com a fórmula (6). Depois deste σ inicial ter sido descoberto, deve pôr-se manualmente o registo MARK a zero. A folha de cálculo produzirá então uma ou várias iterações partindo do σ inicial. As iterações devem prosseguir até que o registo C, onde se calcula o preço da Call pela fórmula de Black-Scholes, se tenha tornado igual ao registo TARGET (onde se deve colocar, no início, o preço da Call).

13 Um possível aspecto da folha de cálculo é o que se mostra na figura 5. Esta figura ilustra a situação em que se pretende achar o σ inicial (registo INIT) e portanto MARK é diferente de zero.

14. As fórmulas: Os registos K, S, R, e TAU contêm os dados do problema e permitem determinar o preço da Call segundo o modelo de Black-Scholes (3). Para isto, introduzir-se-ão as seguintes fórmulas ou semelhantes:

```
nos registos   d_1,   =(LN($S/$K)+($R+SIGMA^2/2)*$TAU)/(SIGMA*SQRT($TAU))
```

K	125	d_1	-2.7E-17	mark	8
S	100	d_2	-0.62151	init	1.243039
exp	0.970445			deriv	9.973557
r	0.12			N'(d_1)	0.199471
tau	0.25			target	2

```
Probabilidades Acumuladas:                    C      -7.40423
d        -2.7E-17 -0.62151                    sigma  1.243039
N(d)     0.249999 0.267128
s(d)     0.249999 0.267128
h(d)     0.199471 0.328873
t               1 0.874148
p        0.231641
b(0)     0.319381
b(1)     -0.35656
 . . .
```

Figura 5: Um aspecto possível para a folha de cálculo capaz de estimar o σ subjacente a C, um dado preço de uma Call. Do lado esquerdo, em baixo, vê-se o espaço reservado ao cálculo dos $N(d_1)$ e $N(d_2)$.

```
d_2,   =(LN($S/$K)+($R-SIGMA^2/2)*$TAU)/(SIGMA*SQRT($TAU))
exp,   =EXP(-$R*$TAU)
 C ,   =$S*$N(D_1)-$K*$EXP*$N(D_2)
```

15 A seguir, introduzem-se as fórmulas que permitem achar INIT, o σ inicial (6) e depois iterar até que os registos TARGET e C fiquem iguais. O registo DERIV contém a fórmula (7). SIGMA implementa INIT para valores de MARK que não sejam zero mas passa a implementar a fórmula (5) caso MARK seja posto a zero. Em 123, estas fórmulas podem ter o aspecto que se mostra a seguir, ou semelhante:

```
nos registos init   ,  =SQRT(ABS(LN($S/$K)+R*TAU)*2/TAU)
             deriv  ,  =$S*SQRT($TAU)*$N'(D_1)
            N'(d_1),   =(1/SQRT(2*PI))*EXP(-D_1^2/2)
             sigma  ,  =IF($MARK<>0,$INIT,$SIGMA-($C-$TARGET)/$DERIV)
```

16 Depois destas fórmulas introduzidas e da inicialização de MARK e de TARGET, o aspecto da folha de cálculo, no fim de seis iterações, deve ser o que a figura 6 mostra. Conclui-se portanto que a dispersão suposta pelos investidores para o activo sobre o qual a Call foi escrita é $\sigma = 0.4035$ uma vez que foi atribuida a esta opção um preço de 2 dólares. Fica assim resolvido o problema proposto.

```
            K         125    d_1   -0.85651            mark        0
            S         100    d_2   -1.05825            init   1.243039
          exp    0.970445                              deriv  13.82214
            r        0.12                            N'(d_1)  0.276442
          tau        0.25                             target         2

Probabilidades Acumuladas:                                C          2
d        -0.85651 -1.05825                             sigma  0.403479
N(d)     0.195855 0.144968
s(d)     0.195855 0.144968
h(d)     0.276442 0.227889
t        0.834441 0.803124
 . . .
```

Figura 6: O aspecto final, depois de seis iterações, da folha de cálculo que estimou o σ subjacente a C, um dado preço de uma Call.

Capítulo 3

Exercícios

17. Considerem-se as "General Pills, September 60 Call options". Supondo que uma acção deste activo está neste momento cotado a 55 dólares e que estas Calls se estão a vender a 8 dólares,

1. Fazer um gráfico com o *payoff* resultante da compra de uma destas Calls em função de várias cotações no exercício, S_T.

2. Fazer um gráfico com o *payoff* resultante da compra de uma acção do activo agora e posterior venda em Setembro, em função de S_T.

3. Qual é o *payoff* resultante da compra de uma acção do activo agora, junto com a escrita (venda) de uma Call sobre essa porção?

4. Num gráfico simples, comparar os *payoff* resultantes da compra de uma acção de General Pills, com os da compra de uma porção de General Pills junto com a escrita de uma Call sobre essa acção, com os do mesmo mas com a escrita de duas Calls em vez de uma, e com os do mesmo com três Calls.

Notar que quem escreve uma Call arrecada o dinheiro da venda hoje, mas tem que fornecer o activo ao comprador da Call no exercício, caso esse comprador queira exercer a sua opção.

18. Uma *bearish spread* consiste em comprar uma Call com um preço no exercício que seja elevado e ao mesmo tempo escrever outra com um que seja baixo. Fazer um gráfico do padrão de lucros desta combinação em função de S_T.

19. Um investidor compra duas Calls, cada uma com o mesmo preço no exercício de 50 dólares, e depois vende uma com um preço no exercício de 40 e a outra com um de 60.

Fazer um gráfico do padrão de lucros desta combinação, conhecida como *butterfly spread* em função de S_T.

20. Numa *straddle* um investidor compra tanto uma Put como uma Call sobre o mesmo activo, com a mesma data de expiração e preço no exercício. Fazer um gráfico do padrão de lucros das três straddles possíveis com os dados abaixo, em função de S_T.

Tipo	K	C_t ou P_t
Call	40	13
Call	50	6
Call	60	3
Put	40	1
Put	50	4
Put	60	10

21. Construir uma folha de cálculo que calcule o valor de uma Call e de uma Put e onde se possa trabalhar com datas, mas onde os cálculos sejam feitos em termos de dias do calendário anual. Assumir que o ano tem 365 dias. Calcular o valor de uma Call escrita sobre uma acção de activo actualmente cotado em 50 dólares. O exercício é 40 dólares, o bem sem risco paga 6% e o desvio-padrão do ganho logarítmico do activo é 20%. A data de expiração é a 23 de Março de 1987 e hoje estamos a 18 de Outubro de 1986.

Bibliografia

[1] F. Black. Facts and fantasy in the use of options. *Financial Analysts Journal*, 31:36–41, 61–72, July - August 1975.

[2] F. Black and M. Scholes. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance*, 27:399–417, May 1972.

[3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:673–659, May 1973.

[4] R. Jarrow and A. Rudd. *Option Pricing*. Irwin, Homewood, Ill., 1983.

[5] S. Manaster and G. Koelher. A note on the calculation of implied variances from the black-scholes method. *Journal of Finance*, 37:227–230, March 1982.