Macroeconometria 2

Mestrado em Economia Monetária e Financeira
Mestrado em Economia

ISCTE-IUL, Dep. de Economia

MODELOS DE HETEROCEDASTICIDADE CONDICIONADA

Luís Filipe Martins

luis.martins@iscte.pt
http://iscte.pt/~lfsm

Departamento de Métodos Quantitativos,
ISCTE - Escola de Gestão

Lisboa, Fevereiro de 2010

1 Motivação

- Evidência Empirica (*stylized fact*): A maior parte das variáveis de natureza financeira apresentam periodos de pouca flutuação seguidas por periodos de grande volatilidade. *Exemplo:* Returns.

Example 1 *Brenner, Harjes, and Kroner (1996) short-term nominal interest rate* y_t *with GARCH efects on interest rate volatility:* $y_{t+1}-y_t=\alpha+\beta y_t+\varepsilon_{t+1}$ *onde* $E_t\left(\varepsilon_{t+1}\right)=0$ *e* $E_t\left(\varepsilon_{t+1}^2\right)=\sigma_t^2 y_t^{2\gamma}$ *onde* $\sigma_t^2=\omega+\theta\varepsilon_t^2+\phi\sigma_{t-1}^2$. *Finding:* $\theta\neq 0,\phi\neq 0$ *e* $\gamma=0.5$.

Example 2 *Regressão para obtenção dos betas do asset* i *com o mercado com a variância condicional do return do mercado como GARCH. Conditional CAPM.*

Example 3 *GARCH-M. Mercados Financeiros: Investidores esperam maiores returns como compensação por deter uma carteira de maior risco* $\rightarrow$ *Alterações na variância (volatilidade) nos mercados financeiros (juros; inflação; returns; ...). Por exemplo,* $ret_t=\mu_t+u_t$, *onde* μ_t *é o return antecipado e* u_t *o return que não é antecipado, e onde* μ_t *está relacionado com a variância de* ret_t.

Example 4 $ARCH-M$ *(ARCH-in-mean):* $y_t=x_t^{'}\beta+\delta h_t+\varepsilon_t$, *onde* δ *dá a intensidade entre o nível e a volatilidade* h_t *de* y_t *pois* $y_t = \mu_t + \varepsilon_t; \mu_t = x_t^{'}\beta + \delta h_t$.

Example 5 *Volatilidade com regressores: Por exemplo,* $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_t$ *em que* D_t *é uma Dummy para Sept 11, 2001. Testar* $\theta = 0$.

2 Introdução

- Análise standard MRLM: Amostra de dimensão $T, \{(x_t^{'}, y_t) : t = 1, ..., T\}$ e incluir o termo independente, $x_{t1} = 1, t = 1, ..., T$:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + u_t = x_t^{'}\beta + u_t, t = 1, ..., T \quad (1)$$

Example 6 *Regressão em torno da média,* $k = 1 : y_t = \beta_1 + u_t, t = 1, ..., T.$

Example 7 $AR(1)$, *onde* $x_t \equiv y_{t-1} : y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + u_t.$

- Hipótese standard do MRLM de interesse:

Homo. (homocedasticidade **não condicional** nos erros) $V(u_t|x_t) = E(u_t^2|x_t) = \sigma^2$ que implica, pela LIE,

$$V(u_t) = E(u_t^2) = \sigma^2, \text{ constante}, t = 1, ..., T. \quad (2)$$

- **MAS** pode **simultaneamente** existir variância **condicional** de u_t,

$$\sigma_t^2 = V(u_t|u_{t-1}, u_{t-2}, ...) = E(u_t^2|u_{t-1}, u_{t-2}, ...),$$

  que varie com t $\therefore$ OBJECTIVO: Especificar e prever a **variância** de y_t em time series, via σ_t^2.

- Testar erros ARCH? Ver teste de Engle (Arch effects).
- Simplificação: $u_t = \varepsilon_t \sim wn\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$. Se ε_t white noise

gaussiano, $\varepsilon_t \sim i.i.d.N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$. Ao assumir a normalidade de ε_t, aplicar técnica e resultados da estimação (conditional) MLE.

3 Modelos ARCH

Engle (1982)

$$y_t = x_t^{'}\beta + \varepsilon_t, t = 1, ..., T.$$

- $\varepsilon_t \sim ARCH(m)$, processo *autoregressive conditional heteroskedastic* de ordem m :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2, t = 1, ..., T, \\ \omega &> 0, \alpha_j \geq 0, j = 1, ..., m. \end{aligned}$$

- Porque,

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + w_t; w_t \sim wn\left(0, \sigma_w^2\right), t = 1, ..., T.$$

ou, alternativamente,

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t; h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2; v_t | \mathcal{E}_{t-1} \sim i.i.d. (0, 1).$$

- Estacionaridade (raízes do polinómio autoregressivo de ε_t^2 fora do circulo unitário): $\alpha_1 + ... + \alpha_m < 1$. Implica variância **não-**condicional $V(u_t) = E(u_t^2) = \sigma^2 = \omega / (1 - \alpha_1 - ... - \alpha_m)$.

- Intuição: ε_t^2 (proxy para variância) tende a ser grande de acordo com ε_{t-j}^2, j pequeno (passado recente).

- MLE para ε_t gaussiano (porque $v_t | \mathcal{E}_{t-1} \sim i.i.d.N (0, 1)$): Com

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_t &= y_t - x_t^{'}\beta, \\
l(\theta) &= \sum_{t=1}^{T} \log f\left(y_t | x_t, \mathbf{w}_{t-1}; \theta\right) = \\
&\quad -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log(h_t) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\left(y_t - x_t^{'}\beta\right)^2}{h_t}, \\
\theta &= \left(\beta^{'}, \omega, \alpha_1, ..., \alpha_m\right)^{'} \\
\mathbf{w}_{t-1} &= \left(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_1, y_0, ..., y_{-m+1}, x_{t-1}^{'}, ..., x_0^{'}, ..., x_{-m+1}^{'}\right)^{'}
\end{aligned}
$$

- $ARCH(1)$: ... Estacionaridade e não-degenerada: $\omega > 0, 0 \leq \alpha_1 < 1$.

Example 8 *Engle (1982), $\varepsilon_t \sim ARCH(4)$: taxa de inflação, π_t, e indice salários reais, r_t, para UK 1958:II - 1977:II,*

$$
\begin{aligned}
\widehat{\pi}_t &= 0.032 + 0.162\pi_{t-1} + 0.264\pi_{t-4} - 0.325\pi_{t-5} + 0.071r_{t-1}, \\
h_t &= 1.4E - 5 + 0.955\left(0.4\varepsilon_{t-1}^2 + 0.3\varepsilon_{t-2}^2 + 0.2\varepsilon_{t-3}^2 + 0.1\varepsilon_{t-4}^2\right).
\end{aligned}
$$

4 Modelos GARCH

Bollerslev (1986)

$$y_t = x_t^{'}\beta + \varepsilon_t, t = 1, ..., T.$$

- $\varepsilon_t \sim GARCH(r,m)$, processo *generalized autoregressive conditional heteroskedastic* de ordem r, m :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} v_t, t = 1, ..., T; v_t | \mathcal{E}_{t-1} \sim i.i.d.\,(0,1) \\ h_t &= \kappa + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + \delta_1 h_{t-1} + ... + \delta_r h_{t-r}; \\ \kappa &> 0, \alpha_j \geq 0, j = 1, ..., m, \delta_j \geq 0, j = 1, ..., r. \end{aligned}$$

- Intuição: $ARCH\ (\infty)$ porque (por exemplo) no $GARCH(1,1)$,

$$h_t = \kappa + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_1 h_{t-1} = \kappa + \alpha_1 \sum_{j=0}^{\infty} \delta_1^j \varepsilon_{t-j-1}^2.$$

- $GARCH(1,1)$... Estacionaridade $\alpha_1 + \delta_1 < 1$.

Example 9 *Bollerslev (1986),* $\varepsilon_t \sim GARCH(1,1)$: *taxa de inflação,* π_t, *para USA 1948:II - 1983:IV,*

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_t &= 0.141 + 0.433\pi_{t-1} + 0.229\pi_{t-2} + 0.349\pi_{t-3} - 0.162\pi_{t-4}, \\ h_t &= 0.007 + 0.135\varepsilon_{t-1}^2 + 0.829 h_{t-1}. \end{aligned}$$

5 Modelo de Volatilidade Assimétrica

- Especificar a variância em distintas respostas consoante a inovação (erro) é negativa (*bad news*) ou positiva (*good news*).

- **Empirical - Efeito alavancagem:** tendência para a volatilidade diminuir quando os retornos aumentam e para subir quando os retornos caem (movimentos de queda no mercado bolsista provocam maiores níveis de volatilidade do que movimentos de subida, para a mesma amplitude).

- Glosten, Jaganathan, and Runkle (1989), $\varepsilon_t \sim TARCH(r, m)$, processo *threshold autoregressive conditional heteroskedastic* de ordem r, m :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} v_t, t = 1, ..., T; v_t | \mathcal{E}_{t-1} \sim i.i.d. \left(0, 1\right). \\ h_t &= \kappa + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + \delta_1 h_{t-1} + ... + \delta_r h_{t-r} \\ &\quad + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}; I_{t-1} = \begin{cases} 1, \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ 0, \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Efeito assimétrico para $\gamma \neq 0$ e efeito alavancagem existe se $\gamma < 0$.

- $TARCH(1, 1)$...

6 Modelos Alternativos

- Nelson (1991), $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t \sim EGARCH(r,m); v_t|\mathcal{E}_{t-1} \sim i.i.d.\,(0,1)$, processo *exponential generalized autoregressive conditional heteroskedastic* de ordem r, m :

$$\log h_t = \omega + \alpha_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| + \gamma_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + ... + \alpha_m \left| \frac{\varepsilon_{t-m}}{\sqrt{h_{t-m}}} \right| + \gamma_m \frac{\varepsilon_{t-m}}{h_{t-m}}$$
$$+\delta_1 \log h_{t-1} + ... + \delta_r \log h_{t-r}.$$

- $ARCH - M$ (ARCH-in-mean): $y_t = x_t^{'}\beta + \delta h_t + \varepsilon_t$, onde δ dá a intensidade entre o nível e a volatilidade de y_t pois $y_t = \mu_t + \varepsilon_t; \mu_t = x_t^{'}\beta + \delta h_t$.

- $IGARCH$ (integrated GARCH): GARCH com $\sum_{j=1}^{r} \delta_j + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$

- Multivariate $GARCH$: $E\left(\varepsilon_t \varepsilon_t^{'} | \mathcal{E}_{t-1}\right)_{k \times k} = H_t$. Especificação para H_t? Numero de parametros a estimar (!) e garantir que H_t é positiva semi-definida (PSD) (!) justifica $H_t = A_0 + A_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^{'} A_1^{'} + B_1 H_{t-1} B_1^{'}$ onde A_0 é PD (BEKK model) ou $h_{ijt} = \rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jjt}}$, onde $\rho_{ii} = 1$ e $h_{iit}, i = 1, ..., k$ são $GARCH$ (VECH model). (ver Engle and Kroner (1995)).

- Volatilidade com regressores: Por exemplo, $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta D_t$ em que D_t é uma Dummy para Sept 11, 2001. Testar $\theta = 0$.

- Absolute value $GARCH(1,1) : h_t = \omega + \delta h_{t-1} + \alpha h_{t-1} \left| \varepsilon_t \right|$.

- ...