Econometria e Métodos de Modelização I

Licenciatura em Economia

TÓPICOS NO MODELO DE REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA, MRLM

Luís Filipe Martins

luis.martins@iscte.pt

http://home.iscte.pt/~lfsm

Departamento de Métodos Quantitativos,

ISCTE - Escola de Gestão

Lisboa, Janeiro de 2006

1 Introdução

- Como definir Econometria? Qual a sua importância?
- Tipos de dados:
  - Seccionais
  - Seccionais agrupados
  - Painel
  - Séries Temporais
  - Spatial
- Descernir causalidade / Efeitos *Ceteribus Paribus*

Example 1 *Retornos na educação:*

$$Salário = \beta_1 + \beta_2 AnosEscolaridade + erro$$

Example 2 *Função de produção Cobb-Douglas:*

$$Output = \beta_1 . Trabalho^{\beta_2} . Capital^{\beta_3} . \exp(erro)$$

Example 3 *Propensão marginal ao consumo:*

$$Consumo = \beta_1 + \beta_2 PIB + erro$$

Example 4 *Curva de Phillips:*

$$TaxaInflacão = \beta_2 OutputGap + erro$$

Example 5 *Paridade dos poderes de compra (PPP):*

$$TaxaCambioNom = \beta_1 + \beta_2 RacioCPI's + erro$$

2 Modelo de Regressão Linear Simples

- População:

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + u \tag{1}$$

$(y, x) = ...; (\beta_1, \beta_2) = ...; u = ...$

- Inferência sobre a Pop. com o recurso a uma Amostra de dimensão n, $\{(x_i, y_i) : i = 1, ..., n\}$

- Hipóteses:

S1 $\{(x_i, y_i) : i = 1, ..., n\}$ Amostra **aleatória** $(i.i.d.)$ de dimensão n de $(1) \Rightarrow y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$

S2 $E(u|x) \overset{S2.1}{=} E(u) \overset{S2.2}{=} 0 \Rightarrow \begin{cases} E(y|x) = \beta_1 + \beta_2 x \\ Cov(x, u) = E(xu) = 0 \end{cases}$

S3 $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 > 0 \Rightarrow$Nao existe perfeita colinearidade (x tem variação).

S4 $V(u|x) = E(u^2|x) - [E(u|x)]^2 = \sigma^2$, constante (Homocedasticidade) $\Rightarrow \begin{cases} V(y|x) = \sigma^2 \\ \sigma^2 \overset{S2}{=} E(u^2|x) \overset{S2.1}{=} E(u^2) = V(u) \end{cases}.$

S5 $u|x \sim Normal \Rightarrow y|x \sim Normal$

- Hypótese $S1$ é adequada (apenas) para dados seccionais. $S1$ tem de ser eliminada se independencia não existir. Por definição,

$$Cov(u_i, u_j|x_i, x_j) = E\left[(u_i - Eu_i|x_i)\left(u_j - Eu_j|x_j\right)|x_i, x_j\right].$$

Por $S2, Cov(u_i, u_j|x_i, x_j) = E\left[u_i u_j|x_i, x_j\right]$. Note que $S1$ implica $Cov(u_i, u_j|x_i, x_j) = E\left[u_i|x_i\right] E\left[u_j|x_j\right]$ e portanto $Cov(u_i, u_j|x_i, x_j) = 0, i \neq j$, ausência de autocorrelação nos erros $\Rightarrow Cov(y_i, y_j|x_i, x_j) = 0, i \neq j (S1)$.

- x deterministico (fixo) vs x estocastico; time series (dependencia)

2.1 OLS (minimos quadrados) - Método dos Momentos

- (β_1, β_2) Desconhecido! $\Rightarrow$ Estimação (e inferência)
- Método:

(a) $\left(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2\right) = \arg\min_{\beta_1, \beta_2} \sum_{i=1}^n u_i^2 =$

$$\arg\min_{\beta_1, \beta_2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i\right)^2 \Rightarrow FOC \tag{2}$$

(b) (Pop S2) $\Rightarrow$ (Amostra)

$$\left(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2\right) : \begin{cases} (1/n) \sum_{i=1}^n \left(y_i - \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2 x_i\right) = 0 \\ (1/n) \sum_{i=1}^n x_i \left(y_i - \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2 x_i\right) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

- Estimador:

$$\begin{cases} \widehat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \\ \widehat{\beta}_1 = \overline{y} - \widehat{\beta}_2 \overline{x} \end{cases} \tag{4}$$

- Erros u_i Não observados! $\Rightarrow$ Estimação (centrado): Residuos

$$\widehat{u}_i = y_i - \widehat{y}_i = y_i - \widehat{E(y_i|x_i)} = y_i - \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2 x_i. \tag{5}$$

$\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i = 0; \overline{u} = 0; \sum_{i=1}^n x_i \widehat{u}_i = 0; \overline{y} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \overline{x}$

- Coefficiente de determinação

$$R^2 = SSE/SST = 1 - SSR/SST, \tag{6}$$

onde

$$\begin{aligned} SST &= SSE + SSR \quad (7) \\ SST &= \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2 ; SSE = \sum_{i=1}^n (\widehat{y}_i - \overline{y})^2 ; SSR = \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2. \end{aligned}$$

2.2 Valor Esperado e Variância do OLS

Proposition 1 *Sob as hipoteses S1-S3 e* (1)*, o estimador OLS é centrado:* $E\left(\widehat{\beta}_1|\mathbf{x}\right) = \beta_1; E\left(\widehat{\beta}_2|\mathbf{x}\right) = \beta_2; \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$

- Numa dada amostra, $\widehat{\beta}$ pode estar proximo ou longe de β. No entanto, a distribuição de $\widehat{\beta}$ está centrada em torno do verdadeiro parametro β. **MAS:** E a variação média (afastamento de β) na distribuição de $\widehat{\beta}$? :

Proposition 2 *Sob as hipoteses S1-S4 e* (1),

$$V\left(\widehat{\beta}_1|\mathbf{x}\right) = \frac{\sigma^2 (1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}; \tag{8}$$

$$V\left(\widehat{\beta}_2|\mathbf{x}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}; \tag{9}$$

$$Cov\left(\widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_1|\mathbf{x}\right) = \frac{-\sigma^2 \overline{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \tag{10}$$

- **MAS:** $V\left(\widehat{\beta}|\mathbf{x}\right)$ Desconhecido porque σ^2 Desconhecido! $\Rightarrow$ Estimação:

Proposition 3 *Sob as hipoteses S1-S4 e* (1),

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2 = SSR/(n-2) \tag{11}$$

é um estimador centrado para σ^2. *Idem para o desvio padrão da regressão* $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2}$.

- Substituindo (11) em (8), o desvio padrão de $\widehat{\beta}$ é $se\left(\widehat{\beta}|\mathbf{x}\right) = \sqrt{\widehat{V\left(\widehat{\beta}|\mathbf{x}\right)}}$.

3 Modelo de Regressao Linear Multipla - Estimação

- Amostra de dimensão n, $\{(x_{i1}, ..., x_{ik}, y_i) : i = 1, ..., n\}$:

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_k x_{ik} + u_i = x_i^{'} \beta + u_i, i = 1, ..., n \quad (12)$$

- Incluir o termo independente, $x_{i1} = 1, i = 1, ..., n$:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik} + u_i = x_i^{'} \beta + u_i, i = 1, ..., n \quad (13)$$

- Notação matricial:

$$\begin{aligned}
y &= X\beta + u \\
x_{i_{k\times 1}} &= (1, x_{i2}, ..., x_{ik})^{'}, i = 1, ..., n; \beta_{k\times 1} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)^{'}; \\
y_{n\times 1} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}; X_{n\times k} = \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ ... \\ x_n^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & ... & x_{1k} \\ ... & ... & & ... \\ 1 & x_{n2} & ... & x_{nk} \end{pmatrix}; \\
u_{n\times 1} &= (u_1, ..., u_n)^{'}.
\end{aligned}$$

- Hipóteses (ver S1-S5):

  M1 (dados seccionais) $\{(x_{i1}, ..., x_{ik}, y_i) : i = 1, ..., n\}$ Amostra **aleatória** $(i.i.d.)$.

  M2 (exogeneidade estrita) $E(u_i|X) = E(u_i|x_1, ..., x_n) = 0, i = 1, ..., n \Leftrightarrow E(u|X) = 0_{n\times 1}$

  M3 (não existe perfeita colinearidade).$rank(X) = k \because$nenhum dos regressores $x_{i2}, ..., x_{ik}$ é constante para todo i (existe termo independente β_1) e não existe qualquer combinação linear entre eles.

M4 (homocedasticidade e ausência de autocorrelação nos erros)

$$\Omega_{n\times n} = V(u|X) \overset{M2}{=} E(\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{'}|X) = \begin{pmatrix} E(u_1^2|X) & ... & E(u_1u_n|X) \\ ... & & ... \\ E(u_nu_1|X) & ... & E(u_n^2|X) \end{pmatrix} \quad (14$$

$$M4 \; : \; \Omega = \begin{pmatrix} \sigma^2 & ... & 0 \\ ... & & ... \\ 0 & ... & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_n$$

M4.1 $V(u_i|X) \overset{M2}{=} E(u_i^2|X) = \sigma^2$, constante,$i = 1, ..., n.$

M4.2 $Cov(u_i, u_j|X) \overset{M2}{=} E(u_iu_j|X) = 0, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$
Nota: $M1 \Rightarrow M4.2$

M5 (normalidade) $u|X \sim Normal$

- Observações:

$$M1 \Rightarrow \begin{cases} E(u_i|X) = E(u_i|x_i) \\ E(u_i^2|X) = E(u_i^2|x_i) \\ E(u_iu_j|X) = E(u_i|x_i)E(u_j|x_j) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E(u_i|X) = E(u_i|x_{i1}, ..., x_{ik}) \\ E(u_i^2|X) = E(u_i^2|x_{i1}, ..., x_{ik}) \\ E(u_iu_j|X) = E(u_i|x_{i1}, ..., x_{ik})E(u_j|x_{j1}, ..., x_{jk}) \end{cases}$$

$M2, M4, M5 \Rightarrow u|X \sim N_n\left(0, \Omega\right); y|X \sim N_n\left(X\beta, \Omega\right)$

$\left(12\right), M1 - M4$: Hipóteses de Gauss-Markov

(12), $M1 - M5$: Hipóteses clássicas do MRLM.

3.1 OLS - Método dos Momentos para $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)^{'}$

- Método:

$$\widehat{\beta} = \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i^{'}\beta\right)^2 =$$

$$\arg\min_{\beta} (y - X\beta)^{'} (y - X\beta) = \arg\min_{\beta} u^{'}u \Rightarrow FOC$$

(Pop M2) $\Rightarrow$ (Amostra)

$$\widehat{\beta} = \left(\widehat{\beta}_1, ..., \widehat{\beta}_k\right) : \begin{cases} (1/n) \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i^{'}\beta\right) = 0 \\ (1/n) \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \left(y_i - x_i^{'}\beta\right) = 0 \\ ... \\ (1/n) \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \left(y_i - x_i^{'}\beta\right) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

- Estimador:

$$\widehat{\beta}_{k\times 1} = \left(X^{'}X\right)^{-1} X^{'}y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^{'}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{16}$$

$$= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 & ... & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{ik} \\ ... & ... & & ... \\ & & ... & \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2}y_i \\ ... \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ik}y_i \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$= \beta + \left(X^{'}X\right)^{-1} X^{'}u = \beta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^{'}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \tag{18}$$

- Interpretação: *Ceteribus Paribus;* Efeitos parciais (estimar efeito de x_{il} em $\widehat{y}_i$ depois de retirados os efeitos de $x_{ih}, h \neq l$ - parte de x_{il} correlacionada com x_{ih})

$$\widehat{y}_i = \widehat{E(y_i|x_{i2}, ..., x_{ik})} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x_{i2} + ... + \widehat{\beta}_k x_{ik} \Rightarrow \tag{19}$$

$$\begin{cases} \triangle \widehat{y}_i = \widehat{\beta}_2 \triangle x_{i2} + ... + \widehat{\beta}_k \triangle x_{ik} \\ E(y_i|x_{i2} \widehat{= 0, ...}, x_{ik} = 0) = \widehat{\beta}_1 \end{cases} \tag{20}$$

$MRLM \rightarrow MRLS$ se $\widehat{\beta}_3 = 0$ ou x_{i2} e x_{i3} não correlacionados (na amostra).

- Resíduos

$$\widehat{u}_i = y_i - \widehat{y}_i = y_i - \widehat{E(y_i|x_i)} = y_i - x_i^{'}\widehat{\beta}, i = 1, ..., n; \tag{21}$$

$$\widehat{u}_{n\times 1} = y - X\widehat{\beta}; SSR = \widehat{u}^{'}\widehat{u} \tag{22}$$

- Coefficiente de determinação

$$R^2 = 1 - SSR/SST = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})\left(\widehat{y}_i - \overline{\widehat{y}}\right)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \left(\widehat{y}_i - \overline{\widehat{y}}\right)^2\right)}, \tag{23}$$

$R^2 \uparrow$ com k!! $\Rightarrow R^2_{adj} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k}$.

3.2 Momentos do Estimador OLS $\widehat{\beta} = \left(\widehat{\beta}_1, ..., \widehat{\beta}_k\right)^{'}$

Proposition 4 *Sob as hipoteses M1-M3 e* (12)*, o estimador OLS* *é centrado:* $E\left(\widehat{\beta}|X\right)=\beta_{k\times 1}$.

Proposition 5 *Sob as hipoteses M1-M4 e* (12)*, Hipóteses de Gauss-Markov,*

$$\begin{aligned}\Sigma_{k\times k} &= V\left(\widehat{\beta}|X\right)=E\left(\left(\widehat{\beta}-\beta\right)\left(\widehat{\beta}-\beta\right)^{'}|X\right) &(24)\\ &= \begin{pmatrix} V(\widehat{\beta}_1|X) & ... & Cov(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_k|X)\\ ... & & ...\\ & ... & V(\widehat{\beta}_k|X)\end{pmatrix} &(25)\\ &= \sigma^2\left(X^{'}X\right)^{-1}=\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_ix_i^{'}\right)^{-1}; &(26)\\ V(\widehat{\beta}_j|X) &= \frac{\sigma^2}{SST_j\left(1-R_j^2\right)}; SST_j=\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij}-\overline{x_j}\right)^2; &(27)\end{aligned}$$

$j=2,...,k$ *e* R_j^2 *resulta da regressão de* x_{ij} *em* $x_{il}, l\neq j$ *com um termo independente. Nota: Multicolinearidade ...*

Proposition 6 *Sob as hipoteses M1-M4 e* (12)*, Hipóteses de Gauss-Markov,*

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2=SSR/(n-k) \tag{28}$$

é um estimador centrado para σ^2*. Idem para o desvio padrão da regressão* $\widehat{\sigma}=\sqrt{\widehat{\sigma}^2}$.

- **Portanto,** $\widehat{\Sigma}_{k\times k}$ resulta de substituir σ^2 (desconhecido) por $\widehat{\sigma}^2$ (estimativa). O desvio padrão de $\widehat{\beta}_j$ é $se\left(\widehat{\beta}_j|X\right) = \sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}$ e é obtido da $diag\left(\widehat{\Sigma}\right)$.
- Inclusão de variáveis statisticamente insignificativas (irrelevantes) $\Rightarrow \widehat{\beta}$ centrado mas perda de efficiência, "$V\left(\widehat{\beta}|\mathbf{x}\right)$" $\uparrow$
- Omissão de variáveis statisticamente significativas $\Rightarrow \widehat{\beta}$ enviesado (excepto regressores não correlacionados na amostra - ver $MRLM \rightarrow MRLS$) mas "$V\left(\widehat{\beta}|\mathbf{x}\right)$" $\downarrow$ (excepto regressores não correlacionados na amostra). Medida *Mean Squared Error* ... "$V\left(\widehat{\beta}|\mathbf{x}\right)$" $\downarrow 0$ quando $n \uparrow \infty$.

Proposition 7 (Gauss-Markov) *Sob as hipoteses M1-M4 e* (12)*, Hipóteses de Gauss-Markov, o estimador OLS* $\widehat{\beta}$ *é BLUE (best - Eficiência - na classe dos linear unbiased estimators).* ***Conclusão:*** *Se as hipóteses de Gauss-Markov forem satisfeitas, utilize-se o OLS.*

4 MRLM - Inferência

- Importância da hipótese $M5$! $M5$ não se verifica em muitos modelos! Para as propriedades asimptóticas (ver o próximo capítulo) $M5$ pode ser eliminada.
- Passos: *(i)* H_0 (e H_1); *(ii)* Estatística de teste T; *(iii)* Distribuição de T; *(iv)* Nivel de significância $\alpha = P_{H_0}(\operatorname{Re} j H_0)$ (erro de tipo I, $\alpha = 0.05$ normalmente) e valor(es) crítico(s); *(v)* Regra de decisão (T_{obs} e v.c.), regiões crítica e de aceitação; *(vi)* $100(1-\alpha)\%$ Intervalo de confiança (*(iii)* sob H_0).
- *(v):*
  (a) H_1 Unilateral: $P_{H_0}(T > vc) = \alpha$, para $H_1 : \theta > \theta_0$, OU $P_{H_0}(T < vc) = \alpha$, para $H_1 : \theta < \theta_0$.
  (b) $H_1 : \theta \neq \theta_0$ Bilateral (normalmente): $P_{H_0}(|T| > vc) = \alpha$, se simétrica OU $P_{H_0}(T > vc_1) = \frac{\alpha}{2}$, $P_{H_0}(T < vc_2) = \frac{\alpha}{2}$ se não é simétrica.
- Potência do teste $\pi(\theta) = 1 - P_{H_1}(AcH_0)$
- $p - value$ é o maior valor para α para o qual ainda não se rejeita H_0 :
  (a) H_1 Unilateral: $p = P_{H_0}(T > T_{obs})$, para $H_1 : \theta > \theta_0$.
  (b) $H_1 : \theta \neq \theta_0$ Bilateral: $p = P_{H_0}(|T| > |T_{obs}|)$ se simétrica.

Proposition 8 *Sob as Hipóteses clássicas do MRLM,* (12), $M1-$

$M5$, *o estimador OLS* $\widehat{\beta}$ *é BUE e*

$$\widehat{\beta}|X \sim N_k\left(\beta, \Sigma\right); \frac{\widehat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\Sigma_{jj}}} \sim N\left(0,1\right), j = 1, ..., k \tag{29}$$

- **MAS** σ^2 não é conhecido!:

Proposition 9 *Sob as Hipóteses clássicas do MRLM,* (12), $M1-M5$,

$$\frac{SSR}{\sigma^2} = \frac{\widehat{u}'\widehat{u}}{\sigma^2} = (n-k)\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k};\ e \tag{30}$$

$$\frac{\widehat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}} \sim t_{n-k}, j = 1, ..., k \tag{31}$$

4.1 Testes t (uma restrição linear)

- Rácio t; (In)Significância estatística (a um nível α) de $\beta_j \Rightarrow x_{ij}$:

$$H_0 : \beta_j = 0; t_{\widehat{\beta}_j} = \frac{\widehat{\beta}_j}{\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}} \sim t_{n-k}; H_1 : \beta_j \lessgtr 0 \text{ ou } H_1 : \beta_j \neq 0 \tag{32}$$

- Valor específico, não nulo, para $\beta_j : H_0 : \beta_j = \beta_{j0}$;

$$t = \frac{\widehat{\beta}_j - \beta_{j0}}{\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}} \sim t_{n-k}; H_1 : \beta_j \lesseqgtr \beta_{j0} \text{ ou } H_1 : \beta_j \neq \beta_{j0} \tag{33}$$

- Uma combinação linear para β :

$$H_0 \; : \; r_1\beta_1 + ... + r_k\beta_k = r^{'}\beta = q; \tag{34}$$

$$t \; = \; \frac{\widehat{q} - q}{se\left(\widehat{q}\right)} \sim t_{n-k}; \widehat{q} = r^{'}\widehat{\beta}; se\left(\widehat{q}\right) = \sqrt{r^{\prime}\widehat{\Sigma}r} \tag{35}$$

Example 6 $H_0 : \beta_2 = \beta_3$;

$$t = \frac{\widehat{\beta}_2 - \widehat{\beta}_3}{se\left(\widehat{\beta}_2 - \widehat{\beta}_3\right)} \sim t_{n-k}; se\left(\widehat{\beta}_2 - \widehat{\beta}_3\right) = \sqrt{\widehat{\Sigma}_{22} + \widehat{\Sigma}_{33} - 2\widehat{\Sigma}_{23}}.$$

Alternativa: Transformar o modelo sob $H_0 : \beta_2 = \beta_3$.

4.2 Intervalo de Confiança

- σ^2 conhecido e $\alpha = 0.05$:

$$P\left(\widehat{\beta}_j - 1.96\sqrt{\Sigma_{jj}} < \beta_j < \widehat{\beta}_j + 1.96\sqrt{\Sigma_{jj}}\right) = 0.95$$

- σ^2 não conhecido:

$$P\left(\widehat{\beta}_j - t^*_{n-k,\alpha/2}\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}} < \beta_j < \widehat{\beta}_j + t^*_{n-k,\alpha/2}\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}\right) = 1 - \alpha;$$

$$P\left(t_{n-k} > \left|t^*_{n-k,\alpha/2}\right|\right) = \alpha$$

- Notas:
  (a) Antes de se obter uma amostra, $\widehat{\beta}_j - 1.96\sqrt{\Sigma_{jj}} < \beta_j < \widehat{\beta}_j + 1.96\sqrt{\Sigma_{jj}}$ é um intervalo aleatório;
  (b) Após a obtenção de uma amostra ($\widehat{\beta}_j$ é um numero real), a probabilidade de

$$\beta_j \in \left[\widehat{\beta}_j - t^*_{n-k,\alpha/2}\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}, \widehat{\beta}_j + t^*_{n-k,\alpha/2}\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}\right]$$

  é zero ou um;
  (c) Como para k fixo, $t_{n-k} \to N(0,1)$ quando $n \to \infty$, usar $t^*_{n-k,\alpha/2} = 1.96$ para n elevado.

4.3 Testes F (múltiplas restrições lineares)

- Teste F; Teste à (in)significância estatística global do modelo (a um nível $\alpha, \beta_j \Rightarrow x_{ij}, j = 2, ..., k$) :

$$H_0 \; : \; \beta_2 = ... = \beta_k = 0; H_1 : \text{Pelo menos um deles} \neq 0 \tag{36}$$

$$F \; = \; \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \sim F_{k-1,n-k}; \tag{37}$$

$$F \; = \; \frac{SSE/(k-1)}{SSR/(n-k)} = \frac{\left(\widehat{\beta}^{'} X'y - n\overline{y}^2\right)/(k-1)}{\left(y'y - \widehat{\beta}^{'} X'y\right)/(n-k)} \tag{38}$$

- Forma geral (j restrições), $H_0 : R_{j\times k}\beta_{k\times 1} = q_{j\times 1}$;

(a) σ^2 conhecido: $W = \widehat{d}' \left[V\left(\widehat{d}\right) \right]^{-1} \widehat{d}$;

$$W \sim \chi_j; \widehat{d} = R\widehat{\beta} - q; V\left(\widehat{d}\right) = \sigma^2 R \left(X'X\right)^{-1} R' \tag{39}$$

(b) σ^2 não conhecido:

$$F = \frac{\left(R_{UR}^2 - R_R^2\right)/j}{\left(1 - R_{UR}^2\right)/(n-k)} \sim F_{j,n-k} \tag{40}$$

$$F = \frac{\left(SSR_R - SSR_{UR}\right)/j}{SSR_{UR}/(n-k)} = \widehat{d}' \left[\widehat{V\left(\widehat{d}\right)} \right]^{-1} \widehat{d}/j \tag{41}$$

$$\widehat{V\left(\widehat{d}\right)} = \widehat{\sigma}^2 R \left(X'X\right)^{-1} R' \tag{42}$$

onde R_R^2, SSR_R são para o modelo sob H_0 e R_{UR}^2, SSR_{UR} sobre o modelo original (sem restrições).

Example 7 *(In)Significância de m regressores:*

$$H_0 : \beta_{k-m+1} = ... = \beta_k = 0; H_1 : \textit{Pelo menos um deles} \neq 0$$

$$F = \frac{\left(SSR_R - SSR_{UR}\right)/m}{SSR_{UR}/(n-k)} = \frac{\left(R_{UR}^2 - R_R^2\right)/m}{\left(1 - R_{UR}^2\right)/(n-k)} \sim F_{m,n-k}.$$

Se $m = 1, F = t^2$.

5 MRLM - Propriedades Assimptóticas

- Propriedades quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, quando n é "grande" / aumenta indefinidamente? Comparar com propriedades para n fixo / "pequeno" / amostra de dimensão finita dos capítulos anteriores.
- Lei(s) dos grandes numeros ((U)LLN); Teorema(s) do limite central ((F)CLT).

5.1 Consistência

- Consistência *versus* Centrado (ver Prop 4 e 7). E se um estimador não é centrado? Apesar disso, é consistente (à medida que $n \uparrow$ o enviesamento desaparece)? Em caso afirmativo, utilize-se desde que n seja "grande". Caso contrário, nem o considere!
- Um estimador é Consistente se a sua distribuição (que depende de n) fica totalmente concentrada no verdadeiro parametro quando $n \rightarrow \infty : p \lim\limits_{n \rightarrow \infty} \widehat{\beta} = \beta$. Uma condição necessária (mas não suficiente) é portanto que $V\left(\widehat{\beta}\right) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.
- Hipótese $M2^{'} : E(u_i) = 0$ e $Cov(u_i, x_{ij}) = 0, j = 1, ..., k, \forall i$.

$M2 \Rightarrow M2^{'}$

Proposition 10 *Sob as hipoteses M1,*$M2^{'}$*,M3 e* (12)*, o estimador*

OLS é consistente: $p\lim_{n\to\infty}\widehat{\beta}=\beta.$

- Notas:
  (a) Como corolário, $p\lim_{n\to\infty}\widehat{\beta}=\beta$ também sob hipoteses M1,$M2$,M3 e (12) .
  (b) Mas, sob M1,$M2^{'}$,M3 e (12), $\widehat{\beta}$ pode não ser centrado!
  (c) Se $M2^{'}$ não se verificar, $\widehat{\beta}$ é inconsistente (além de enviesado, claro!)

5.2 Normalidade e Inferência Assimptótica

- Derivar distribuição (assimpt.) de $\widehat{\beta}$ e consequente inferência SEM impor normalidade (!) dos erros, $M5$ (ver Prop 8 e 9). Para isso, invoca-se CLT e em aplicações utiliza-se uma amostra com n "grande". OLS é BLUE mesmo sem $M5$.

Proposition 11 *Sob as hipoteses M1-M4 e* (12)*,* $p\lim_{n\to\infty}\widehat{\sigma}^2=\sigma^2$ *e*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\beta}-\beta\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\sigma^2M_{XX}^{-1}\right);\frac{\widehat{\beta}_j-\beta_j}{\sqrt{\widehat{\Sigma}_{jj}}}\xrightarrow{d}N\left(0,1\right),j=1,...,k \tag{43}$$

onde $M_{XX}=p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_ix_i^{'}\right).$

- Observação: Para k fixo, $Y_n\xrightarrow{d}N\left(0,1\right)$ em que $Y_n\sim t_{n-k}$.

5.3 Eficiência Assimptótica

- OLS é BLUE sem $M5$ e BUE com $M5$ (ver 7 e 8). E se retirar-mos $M5$ e estiver-mos interessados em $n \to \infty$ (substituir U por C=consistente)? Há condições em que o OLS é (assimptoticamente) "Best", tendo a menor variância assimptótica para $\sqrt{n}\left(\widetilde{\beta}_j - \beta_j\right)$:

Proposition 12 *Sob as hipoteses M1-M4 e* (12)*, além de consistente o OLS é BAN (best asymptotically normal) na classe CAN de estimadores lineares.*

6 Alguns Tópicos no MRLM

6.1 Unidades de Medida

- Consequências no modelo quando as unidades de medida das variáveis muda(m):

$$\widehat{E(y|x)} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x \rightarrow \widehat{E(\widetilde{y}|\widetilde{x})} = \widetilde{\beta}_1 + \widetilde{\beta}_2 \widetilde{x}; \widetilde{y} = ay; \widetilde{x} = bx$$

- $$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_1 &= a\widehat{\beta}_1; \widetilde{\beta}_2 = \frac{a}{b}\widehat{\beta}_2; \\ se\left(\widetilde{\beta}_1\right) &= a.se\left(\widehat{\beta}_1\right); se\left(\widetilde{\beta}_2\right) = \frac{a}{b} se\left(\widehat{\beta}_2\right); \\ & t_{\widetilde{\beta}_1}, t_{\widetilde{\beta}_2}, R^2 \text{ inalterados} \end{aligned}$$

6.2 Erros de Medida

- Variável dependente e/ou regressor(es) não é correctamente observado mas contém um erro na sua medição.

Example 8 $Sav^* = \beta_1 + \beta_2 Inc + u$, *onde* Inc *é rendimento disponível e* Sav^* *é poupança mas que é medida com erro:* $e = Sav - Sav^*, E(e) = 0, V(e) = \sigma_e^2$, *onde* Sav *é o verdadeiro valor. Consequências para* $\widehat{\beta}$*?*

- O verdadeiro modelo (DGP) é $Sav = \beta_1 + \beta_2 Inc + (u + e)$.

- $\widehat{\beta}$ perde eficiência: $Var\,(u+e) = \sigma_u^2 + \sigma_e^2 > \sigma_u^2$ com $Cov(u,e) = 0$.
- $\widehat{\beta}_1$ não é centrado se $E(e) \neq 0$ e $\widehat{\beta}$ é inconsistente se $Cov(Inc, e) \neq 0$.

Example 9 *$Sav = \beta_1 + \beta_2 Inc^* + u$, onde Sav é poupança e Inc^* é rendimento disponível mas que é medido com erro: $e = Inc - Inc^*, E(e) = 0, V(e) = \sigma_e^2$, onde Inc é o verdadeiro valor. Consequências para $\widehat{\beta}_2$?*

- O DGP é $Sav = \beta_1 + \beta_2 Inc + (u - \beta_2 e)$.
- $\widehat{\beta}_2$ é inconsistente:

$$p\lim_{n\to\infty} \widehat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{Cov(u-\beta_2 e, Inc)}{V(Inc)} = \beta_2 \left(\frac{\sigma_{Inc^*}^2}{\sigma_{Inc^*}^2 + \sigma_e^2} \right) < \beta_2,$$

porque

$$\begin{aligned} Cov(u-\beta_2 e, Inc) &= Cov(u, Inc) + Cov(-\beta_2 e, Inc) \\ &= -\beta_2 \sigma_e^2 \neq 0, \end{aligned}$$

com $Cov(e, Inc) = E(e.Inc) = E(e^2) - E(e.Inc^*) = \sigma_e^2$, assumindo que $Cov(u, Inc) = 0$ e $Cov(e, Inc^*) = 0$.

- ”Nota”: A qualidade do processo de amostragem condiciona a existência de erros de medida.

6.3 Inclusão de Variáveis Irrelevantes e Omissão de

Relevantes

- Consequências para o modelo?

Example 10 *$Sal = \beta_1^* + \beta_2^* Exp + \beta_3^* Pet + u$, onde Sal é salário, Exp é anos de experiência e Pet é o número de animais de estimação que o presidente da junta a que pertence o individuo tem (naturalmente, $\beta_3^* = 0$.) Consequências para $\widehat{\beta}^*$?*

- $\widehat{\beta}^*$ centrado mas em geral perde eficiência.

Example 11 *$Sal = \beta_1^* + \beta_2^* Exp + u$, onde Sal é salário, Exp é anos de experiência e u inclui a variável idade que está correlacionada com Exp. Consequências para $\widehat{\beta}_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n \left(Exp_i - \overline{Exp}\right) Sal_i}{\sum_{i=1}^n \left(Exp_i - \overline{Exp}\right)^2}$?*

- O verdadeiro modelo é $Sal = \beta_1 + \beta_2 Exp + \beta_3 Id + v, \beta_3 \neq 0$.
- $\widehat{\beta}_2^*$ não é centrado porque $\beta_3 \neq 0$ e $\widehat{\delta}_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\beta}_2^* | Exp, Id\right) &= \beta_2 + \beta_3 \frac{\sum_{i=1}^n \left(Exp_i - \overline{Exp}\right) Id_i}{\sum_{i=1}^n \left(Exp_i - \overline{Exp}\right)^2} \\ &= \beta_2 + \beta_3 \widehat{\delta}_2 \neq \beta_2, \end{aligned}$$

  onde $E\left(Id|Exp\right) = \delta_1 + \delta_2 Exp$, uma função de Exp!
- Inconsistente (não corrige o bias assimptóticamente): Como

$Cov(Id, Exp) \neq 0$,

$$p \lim_{n\to\infty} \widehat{\beta}_2^* = \beta_2 + \beta_3 \frac{Cov(Id, Exp)}{V(Exp)} \neq \beta_2.$$

- Para $\beta_3 > 0$ e $\sum_{i=1}^n \left(Exp_i - \overline{Exp}\right) Id_i > 0$ e $Cov(Id, Exp) > 0$, os enviesamentos (finito ou assimptótico) são de sinal positivo ($\widehat{\beta}_2^*$ sobreavalia o verdadeiro valor $\widehat{\beta}_2$).

- ”Observação”: A inclusão de variáveis irrelevantes pode e deve ser controlada mas a omissão de relevantes nem sempre é possivel de controlar.

6.4 Regressão na Origem

- Para $\beta_1 = 0$,

$$\widehat{E\left(y|x\right)} = \widetilde{\beta}_2 x; \widetilde{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \beta_2 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- Se na verdade, $\beta_1 \neq 0$, então $\widetilde{\beta}_2$ é inconsistente.

- Se na verdade $\beta_1 = 0$ em $\widehat{E\left(y|x\right)} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x$ então $\widehat{\beta}_2$ perde eficiência.

- ”Regra”: Sem informação em contrário, especificar o MRLM COM termo independente β_1.

6.5 Variáveis Dummy e Teste de Chow

- X contém regressores que não são mensuráveis: Uso de variáveis binárias (Dummy) para representar variáveis de natureza qualitativa, $D_i = \begin{cases} 1, \text{ se } i \in A \\ 0, \text{ se } i \notin A \end{cases}$, A é um certo atributo para a $i-$ésima observação.

- Notas:
  (a) Todos os elementos do conjunto correspondente à variável qualitativa têm de estar representados em $D_i = 1$ ou $D_i = 0$.
  (b) Num modelo com termo independente e para uma variável que admite r atributos diferentes, no máximo apenas se podem utilizar $r - 1$ dummies como regressores.
  (c) Aplicação natural a modelos time series com sazonalidade.
  (d) Mantém-se as fórmulas e propriedades do OLS e inferência.

Example 12 $D_i = \begin{cases} 1, \; \textit{se } i \textit{ masculino} \\ 0, \; \textit{se } i \textit{ feminino} \end{cases}$, $D_t = \begin{cases} 1, \; \textit{se } t \textit{ guerra} \\ 0, \; \textit{se } i \textit{ paz} \end{cases}$, $D_t = \begin{cases} 1, \; \textit{se } t \textit{ é } 1^o \textit{ trimestre} \\ 0, \; \textit{se caso contrário} \end{cases}$, $D_i = \begin{cases} 1, \; \textit{se } i \textit{ norte} \\ 0, \; \textit{se caso contrário} \end{cases}$, $D_{1i} = \begin{cases} 1, \; \textit{se } i \textit{ formação superior} \\ 0, \; \textit{se caso contrário} \end{cases}$, $D_{2i} = \begin{cases} 1, \; \textit{se } i \textit{ secundária} \\ 0, \; \textit{se caso contrário} \end{cases}$, $D_{3i} = \begin{cases} 1, \; \textit{se } i \textit{ primária} \\ 0, \; \textit{se caso contrário} \end{cases}$, $D_{4i} = \begin{cases} 1, \; \textit{se } i \textit{ não tem formação} \\ 0, \; \textit{se caso contrário} \end{cases}$

- Possíveis especificações (ver papel de Dummies no termo independente e declive ...):

(a) $y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + u_i$

(b) $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 D_i + u_i$

(c) $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 x_i D_i + u_i$

(d) $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 D_i + \beta_4 x_i D_i + u_i$

(e) $y_i = \beta_1 + \beta_2 D_{1i} + \beta_3 D_{2i} + \beta_4 D_{3i} + u_i$

(f) $y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + \beta_3 D_{1i} + \beta_4 D_{2i} + \beta_5 D_{3i} + \beta_6 D_i D_{1i} + \beta_7 D_i D_{2i} + \beta_8 D_i D_{3i} + u_i$

- Testar se há diferenças entre **dois** grupos: Teste de Chow (ilustrado para um regressor apenas).

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i, i \in \text{Grupos 1 e 2}, SSR, n \\
y_i &= \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i i \in \text{Grupo1}, SSR_1, n_1 \\
y_i &= \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i i \in \text{Grupo 2}, SSR_2, n_2 \\
n &= n_1 + n_2; SSR \geq SSR_1 + SSR_2.
\end{aligned}
$$

- (a) H_0 : Não há diferença estatística entre os **dois** grupos (eliminar Dummies do modelo).

  (b)

$$F = \frac{(SSR - (SSR_1 + SSR_2))/k}{(SSR_1 + SSR_2)/(n - 2k)} \sim F_{k,n-2k} \tag{44}$$

- O teste de Chow é uma alternativa a um teste F standard sob todos os regressores com dummies

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 D_i + \beta_4 x_i D_i + u_i, SSR_{UR}, n \qquad (45)$$

onde $SSR_{UR} = SSR_1 + SSR_2; SSR \geq SSR_{UR}$.

6.6 Forma Funcional

- O MRL $(1),(12)$ é não só linear em β (MRL) mas também em X. MAS: Modelos teóricos e Dados podem induzir relações não lineares entre y e X :
  (a) $\ln y = \beta_1 + \beta_2 \ln x + u : \beta_2 = \frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{dy/y}{dx/x}$, elasticidade de y em relação a x.
  (b) $y = \beta_1 + \beta_2 \ln x + u : \beta_2 = \frac{dy}{dx/x}$
  (c) $\ln y = \beta_1 + \beta_2 x + u : \beta_2 = \frac{dy/y}{dx}$
  (d) $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + u : \frac{dy}{dx} = \beta_2 + 2\beta_3 x$, não constante
  (e) $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 z + \beta_4 xz + u : \frac{dy}{dx} = \beta_2 + \beta_4 z$, ...
  (f) $y = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x} + u$
  (g) ...

6.7 Previsão

- O MRL $(1),(12)$ pode ser usado para prever Ey (previsão média) ou y (previsão individual) condicionado à realização $x_{0_{k\times 1}} = (1, x_{02}, ..., x_{0k})'$.
- Média: Prever $E(y_0|x_0) = x_0'\beta$:

(a) Pontual: $\widehat{E\left(y_0|x_0\right)} = x_0^{'}\widehat{\beta} = \widehat{y}_0$

(b) Intervalo:

$$P\left(\widehat{y}_0 - t^*_{n-k,\alpha/2}\widehat{\sigma}_{pm} < E\left(y_0|x_0\right) < \widehat{y}_0 + t^*_{n-k,\alpha/2}\widehat{\sigma}_{pm}\right) = 1-\alpha, \tag{46}$$

onde $P\left(t_{n-k} > \left|t^*_{n-k,\alpha/2}\right|\right) = \alpha$ e

$$\widehat{\sigma}^2_{pm} = \widehat{V\left(\widehat{y}_0|x_0\right)} = \widehat{V\left(x_0^{'}\widehat{\beta}|x_0\right)} = x_0^{'}\widehat{\Sigma}x_0 = \widehat{\sigma}^2 x_0^{'}\left(X^{'}X\right)^{-1}x_0 \tag{47}$$

- Individual: Prever $y_0|x_0 = x_0^{'}\beta + u_0$

(a) Pontual: $\widehat{y_0|x_0} = x_0^{'}\widehat{\beta} = \widehat{y}_0$

(b) Intervalo:

$$P\left(\widehat{y}_0 - t^*_{n-k,\alpha/2}\widehat{\sigma}_{pi} < E\left(y_0|x_0\right) < \widehat{y}_0 + t^*_{n-k,\alpha/2}\widehat{\sigma}_{pi}\right) = 1-\alpha; \tag{48}$$

onde

$$\widehat{\sigma}^2_{pi} = \widehat{V\left(\widehat{y}_0 + u_0|x_0\right)} = \widehat{\sigma}^2\left(1 + x_0^{'}\left(X^{'}X\right)^{-1}x_0\right) = \widehat{\sigma}^2 + \widehat{\sigma}^2_{pm} \tag{49}$$

- Erro de Previsão:

$$
\begin{aligned}
ep_m &= E\left(y_0|x_0\right) - \widehat{y}_0 = x_0^{'}\beta - \widehat{y}_0 = x_0^{'}\left(\beta - \widehat{\beta}\right) \quad (50)\\
E\left(ep_m|x_0\right) &= 0; V\left(ep_m|x_0\right) = V\left(\widehat{y}_0|x_0\right) = \sigma_{pm}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ep_i &= y_0|x_0 - \widehat{y}_0 = x_0^{'}\beta - \widehat{y}_0 + u_0 = x_0^{'}\left(\beta - \widehat{\beta}\right) + u_0\\
E\left(ep_i|x_0\right) &= 0; V\left(ep_i|x_0\right) = V\left(\widehat{y}_0|x_0\right) + V\left(u_0|x_0\right) = \sigma_{pi}^2
\end{aligned}
$$

6.8 Testes às Hipóteses do Modelo

- **Ênfase: Dados seccionais.**
- Amostra de dimensão $n, \{(x_{i1}, ..., x_{ik}, y_i) : i = 1, ..., n\}$, aleatória $(i.i.d.)$?

Técnica de Amostragem!

- Forma Funcional $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik} + u_i = x_i^{'}\beta + u_i, i = 1, ..., n$ correcta?

Teste Reset (REgression Specification Error Test) para dois termos: $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0$ em $y_i = x_i^{'}\beta + \delta_1 \widehat{y}_i^2 + \delta_2 \widehat{y}_i^3 + v_i$. Estatisticas $F = \frac{\left(R_{UR}^2 - R_R^2\right)/2}{(1-R_{UR}^2)/(n-k-2)} \sim F_{(2,n-k-2)}$ ou $LM = nR^2 \xrightarrow{d} \chi_{(2)}^2$.

- Exogeneidade $E(u_i|X) = E(u_i|x_1, ..., x_n) \overset{?}{=} E(u_i) \overset{ok}{=} 0, i = 1, ..., n$?

Ver apontamentos (capítulo ?)

- Não existe perfeita colinearidade, $rank(X) = k$?

  ”Sintomas” ...

  Matriz $(k \times k)$ de correlações empiricas dos regressores $(|\cdot| < 0.8)$.
  $VIF = \frac{1}{1-R_j^2}$ mede a col. de X_j com os outros regressores (< 10); $CI = \sqrt{\frac{MaxValor\Pr oprioX}{MinValor\Pr oprioX}}$ col. moderada para $10 < CI < 30$.

- Homocedasticidade nos erros, $V(u_i|X) = E(u_i^2|X) = \sigma^2$, constante, $i = 1, ..., n$?

  Ver apontamentos (capítulo ?)

- Ausência de autocorrelação nos erros $Cov(u_i, u_j|X) = E(u_i u_j|X) = 0, i, j = 1, ..., n, i \neq j$?

  Ver apontamentos - **Dados Time Series**!!!

- Normalidade nos erros, $u|X \sim Normal$?

  Teste JB (Jarque-Bera): $JB = n\left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right] \xrightarrow{d} \chi^2_{(2)}$, onde S é skewness e K é kurtosis dos resíduos OLS.

6.9 Outros Testes de Diagnóstico/Especificação

...

J. Davidson

...