Apêndice A

Notação e símbolos

A.1 Notação e símbolos

1. Todos os pedaços de código (i.e., pedaços de texto numa linguagem de programação) e construções específicas do C++ aparecem em tipo (de letra) de largura constante (como Courier). Por exemplo: `main()` e `i++;`. Em todo o restante texto usa-se um tipo proporcional. Nos comentários em C++ usa-se também um tipo proporcional.[1]

2. As variáveis matemáticas aparecem sempre em itálico. Por exemplo: $n = qm + r$.

3. $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

4. $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros.

5. $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais.

6. $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

7. Os conjuntos podem ser indicados em extensão colocando os seus elementos entre $\{\}$.

8. $\{\}$ e $\emptyset$ são representações alternativas para o conjunto vazio.

9. $\sharp$ é o operador cardinal, que faz corresponder a cada conjunto o respectivo número de elementos.

10. Os produtos matemáticos nem sempre são escritos explicitamente: pq significa o mesmo que $p \times q$, ou seja, o produto de p por q.

11. O valor absoluto de um número x representa-se por $|x|$.

12. Os símbolos usados para as igualdades e desigualdades quando inseridos em expressões matemáticas (e não expressões C++, onde a notação do C++ é usada) são os seguintes:

[1] Um tipo diz-se proporcional se a largura dos caracteres varia: um 'i' e muito mais estreito que um 'm'. Pelo contrario, num tipo de largura fixa todos os caracteres tem a mesma largura.

$=$ significa "é igual a" ou "é equivalente a".

$\equiv$ significa "é idêntico a" ou "é o mesmo que"[2].

$\neq$ significa "diferente de".

$>$ significa "maior que".

$\geq$ significa "maior ou igual a".

$<$ significa "menor que".

$\leq$ significa "menor ou igual a".

13. A conjunção e a disjunção representam-se pelos símbolos $\wedge$ e $\vee$ ($\oplus$ significa "ou exclusivo").
14. A pertença a um conjunto indica-se pelo símbolo $\in$.
15. A implicação e a equivalência representam-se pelos símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$.
16. Os valores lógicos representam-se por:

    $\mathcal{V}$ significa verdadeiro.

    $\mathcal{F}$ significa falso.
17. A operação de negação representa-se pelo símbolo $\neg$.
18. A operação de obtenção do resto da divisão inteira representa-se pelo símbolo $\div$.
19. O símbolo usado para "aproximadamente igual" é $\approx$.
20. Predicado é uma expressão matemática envolvendo variáveis que, de acordo com o valor dessas variáveis, pode ter valor lógico verdadeiro ou falso. Por exemplo, $x > y$ é um predicado. Se $x = 1$ e $y = 0$ o predicado tem valor lógico $\mathcal{V}$ (verdadeiro).
21. Os quantificadores representam-se como se segue (em todos os casos à variável i chama-se variável [muda] de quantificação):[3]

    Soma: $(\mathbf{S}\, i : m \leq i < n : f(i))$ ou $\sum_{m \leq i < n} f(i)$ é a soma (o somatório) dos valores que a função $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n-1)$.

    Produto: $(\mathbf{P}\, i : m \leq i < n : f(i))$ ou $\prod_{m \leq i < n} f(i)$ é o produto dos valores que a função $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m)f(m+1)\cdots f(n-1)$.

    Qualquer que seja: $(\mathbf{Q}\, i : m \leq i < n : f(i))$ ou $\bigwedge_{m \leq i < n} f(i)$ ou ainda $\forall m \leq i < n : f(i)$ é a conjunção dos valores (lógicos) que o predicado $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m) \wedge f(m+1) \wedge \cdots \wedge f(n-1)$, ou seja, é o mesmo que afirmar que "qualquer que seja i com $m \leq i < n$, $f(i)$ é verdadeira", daí que seja conhecido como o **quantificador universal**.

[2] É necessário clarificar a diferença entre igualdade e identidade. Pode-se dizer que dois gémos são iguais, mas não que são idênticos, pois são indivíduos diferentes. Por outro lado, pode-se dizer que Fernando Pessoa e Alberto Caeiro não são apenas iguais, mas também idênticos, pois são nomes que se referem à mesma pessoa.

[3] Notação retirada de [8].

Existe um: $(\mathbf{E}\, i : m \leq i < n : f(i))$ ou $\bigvee_{m \leq i < n} f(i)$ ou ainda $\exists m \leq i < n : f(i)$ é a disjunção dos valores (lógicos) que o predicado $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m) \vee f(m+1) \vee \cdots \vee f(n-1)$, ou seja, é o mesmo que afirmar que "existe pelo menos um i com $m \leq i < n$ tal que $f(i)$ é verdadeira", daí que seja conhecido como o **quantificador existencial**.

Contagem: $(\mathbf{N}\, i : m \leq i < n : f(i))$ é o número dos valores (lógicos) verdadeiros que o predicado $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o número de valores lógicos verdadeiros na sequência $f(m),\ f(m+1),\ \cdots\ f(n-1)$.

22. Note-se que a notação $x < y < z$ (onde em vez de $<$ pode surgir $\leq$) é uma forma abreviada de escrever $x < y \wedge y < z$.

23. $\dim(x)$ é a dimensão de x, que tanto pode ser uma matriz como um vector (ver Capítulo 5).

24. Sejam v_1 e v_2 duas sequências de dimensões $\dim(v_1)$ e $\dim(v_2)$ tomando valores num conjunto $\mathbb{A}$. Diz-se que v_1 é uma permutação de v_2 e vice-versa se $\dim(v_1) = \dim(v_2) \wedge (\mathbf{Q}\, x :: (\mathbf{N}\, j : 0 \leq j < \dim(v_1) : v_1[j] = x) = (\mathbf{N}\, j : 0 \leq j < \dim(v_2) : v_2[j] = x))$, ou seja, se as sequências tiverem a mesma dimensão e contiverem exactamente os mesmo valores com o mesmo número de repetições. Define-se um predicado perm para verificar se duas sequências são permutações uma da outra da seguinte forma:

$$\mathrm{perm}(v_1, v_2) \equiv \dim(v_1) = \dim(v_2) \wedge (\mathbf{Q}\, x :: (\mathbf{N}\, j : 0 \leq j < \dim(v_1) : v_1[j] = x) = (\mathbf{N}\, j : 0 \leq j < \dim(v_2$$

A notação para os quantificadores divide-se em três partes: $(a : b : c)$. A primeira parte, a, indica o tipo de quantificador e as respectivas variáveis mudas bem como o respectivo conjunto base. Por exemplo, $(\mathbf{P}\, i, j \in \mathbb{N} : \cdots : \cdots)$ indica um produto para todos os i e j inteiros. A segunda parte, b, consiste num predicado que restringe os valores possíveis das variáveis mudas. Esse predicado pode ser omitido se for sempre $\mathcal{V}$. Na realidade, portanto, as variáveis mudas tomam apenas valores que tornam o predicado verdadeiro. Por exemplo, $(\mathbf{P}\, i \in \mathbb{N} : i \div 2 \neq 0 : \cdots)$ indica um produto para todos os inteiros ímpares. O mesmo efeito poderia ser obtido escrevendo $(\mathbf{P}\, i \in \{j \in \mathbb{N} : i \div 2 \neq 0\} : \mathcal{V} : \cdots)$, onde o predicado é sempre verdadeiro e se restringe à partida o conjunto base do quantificador. A parte c indica os termos do quantificador.

O conjunto de valores que a variável muda de um quantificador pode tomar pode ser indicado implicitamente ou explicitamente. Em qualquer dos casos a indicação é feita através de um predicado que será verdadeiro para todos os valores que se pretende que a variável muda tome e falso no caso contrário. O conjunto base da variável muda pode ser indicado na primeira parte do quantificador quando a indicação for implícita. Quando o conjunto base não for indicado assume-se que é $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros). Exemplos:

1. $(\mathbf{Q}\, i : i \in \mathbb{N} : \cdots)$, $(\mathbf{Q}\, i \in \mathbb{N} : \mathcal{V} : \cdots)$, $(\mathbf{Q}\, i \in \mathbb{Z} : i > 0 : \cdots)$ ou $(\mathbf{Q}\, i : i > 0 : \cdots)$: para todos os naturais.

2. $(\mathbf{Q}\, i \in \mathbb{N} : i \div 2 = 0 : \cdots)$ ou, menos formalmente, $(\mathbf{Q}\, i \in \mathbb{N} : i\,\mathrm{par} : \cdots)$: para todos os naturais pares.

3. $(\mathbf{Q}\, i \,:\, m \leq i < n \,:\, \cdots)$: para todos os inteiros entre m (*inclusive*) e n (*exclusive*).
4. $(\mathbf{Q}\, i \in \{1,\, 4,\, 5\} \,:\,:\, \cdots)$: para todos os elementos do conjunto $\{1,\, 4,\, 5\}$.

Os quantificadores têm, por definição, os seguintes valores quando o conjunto de valores possíveis para a variável de quantificação é vazio:

- $(\mathbf{S}\, i \,:\, \mathcal{F} \,:\, \cdots) = 0$, a soma de zero termos é nula.
- $(\mathbf{P}\, i \,:\, \mathcal{F} \,:\, \cdots) = 1$, o produto de zero termos é 1.
- $(\mathbf{Q}\, i \,:\, \mathcal{F} \,:\, \cdots) = \mathcal{V}$, a conjunção de zero predicados é verdadeira.
- $(\mathbf{E}\, i \,:\, \mathcal{F} \,:\, \cdots) = \mathcal{F}$, a disjunção de zero predicados é falsa.
- $(\mathbf{N}\, i \,:\, \mathcal{F} \,:\, \cdots) = 0$, a contagem de zero predicados é nula.

Em geral , quando o conjunto de variação da variável muda é vazio, o valor destes quantificadores é o elemento neutro da operação utilizada no quantificador. Assim, para a soma é 0, para o produto é 1, para a conjunção é $\mathcal{V}$ e para a disjunção é $\mathcal{F}$.

Existem (pelo menos) as seguintes equivalências entre quantificadores:

- $(\mathbf{Q}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, f(i)) = \neg\, (\mathbf{E}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, \neg f(i))$.
- $(\mathbf{E}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, f(i)) = \neg\, (\mathbf{Q}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, \neg f(i))$.
- $(\mathbf{Q}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, \neg f(i)) = \neg\, (\mathbf{E}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, f(i))$ é o mesmo que $(\mathbf{N}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, f(i)) = 0$.
- $(\mathbf{Q}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, f(i)) = \neg\, (\mathbf{E}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, \neg f(i))$ é o mesmo que $(\mathbf{N}\, i \in A \,:\, p(i) \,:\, f(i)) = \sharp\, \{i \in A \,:\, p(i)\}$.

A.2 Abreviaturas e acrónimos

e.g. (do latim *exempli gratia*) por exemplo (também se pode usar v.g., de *verbi gratia*).

i.e. (do latim *id est*) isto é.

vs. (do latim *versus*) versus, contra.

cf. (do latim *confer*) conferir, confrontar, comparar.

viz. (do latim *videlicet*) nomeadamente.