

Apêndice A

Notação e símbolos

A.1 Notação e símbolos

1. Todos os pedaços de código (i.e., pedaços de texto numa linguagem de programação) e construções específicas do C++ aparecem em tipo (de letra) de largura constante (como Courier). Por exemplo: `main()` e `i++;`. Em todo o restante texto usa-se um tipo proporcional. Nos comentários em C++ usa-se também um tipo proporcional.¹
2. As variáveis matemáticas aparecem sempre em itálico. Por exemplo: $n = qm + r$.
3. \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais.
4. \mathbb{Z} é o conjunto dos números inteiros.
5. \mathbb{Q} é o conjunto dos números racionais.
6. \mathbb{R} é o conjunto dos números reais.
7. Os conjuntos podem ser indicados em extensão colocando os seus elementos entre $\{\}$.
8. $\{\}$ e \emptyset são representações alternativas para o conjunto vazio.
9. $\#$ é o operador cardinal, que faz corresponder a cada conjunto o respectivo número de elementos.
10. Os produtos matemáticos nem sempre são escritos explicitamente: pq significa o mesmo que $p \times q$, ou seja, o produto de p por q .
11. O valor absoluto de um número x representa-se por $|x|$.
12. Os símbolos usados para as igualdades e desigualdades quando inseridos em expressões matemáticas (e não expressões C++, onde a notação do C++ é usada) são os seguintes:

¹Um tipo diz-se proporcional se a largura dos caracteres varia: um 'i' e muito mais estreito que um 'm'. Pelo contrario, num tipo de largura fixa todos os caracteres tem a mesma largura.

- = significa “é igual a” ou “é equivalente a”.
- \equiv significa “é idêntico a” ou “é o mesmo que”².
- \neq significa “diferente de”.
- $>$ significa “maior que”.
- \geq significa “maior ou igual a”.
- $<$ significa “menor que”.
- \leq significa “menor ou igual a”.

13. A conjunção e a disjunção representam-se pelos símbolos \wedge e \vee (\oplus significa “ou exclusivo”).
14. A pertença a um conjunto indica-se pelo símbolo \in .
15. A implicação e a equivalência representam-se pelos símbolos \Rightarrow e \Leftrightarrow .
16. Os valores lógicos representam-se por:
 - \mathcal{V} significa verdadeiro.
 - \mathcal{F} significa falso.
17. A operação de negação representa-se pelo símbolo \neg .
18. A operação de obtenção do resto da divisão inteira representa-se pelo símbolo \div .
19. O símbolo usado para “aproximadamente igual” é \approx .
20. Predicado é uma expressão matemática envolvendo variáveis que, de acordo com o valor dessas variáveis, pode ter valor lógico verdadeiro ou falso. Por exemplo, $x > y$ é um predicado. Se $x = 1$ e $y = 0$ o predicado tem valor lógico \mathcal{V} (verdadeiro).
21. Os quantificadores representam-se como se segue (em todos os casos à variável i chama-se variável [muda] de quantificação):³

Soma: ($\mathbf{S}i : m \leq i < n : f(i)$) ou $\sum_{m \leq i < n} f(i)$ é a soma (o somatório) dos valores que a função $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m) + f(m+1) + \dots + f(n-1)$.

Produto: ($\mathbf{P}i : m \leq i < n : f(i)$) ou $\prod_{m \leq i < n} f(i)$ é o produto dos valores que a função $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m)f(m+1)\dots f(n-1)$.

Qualquer que seja: ($\mathbf{Q}i : m \leq i < n : f(i)$) ou $\bigwedge_{m \leq i < n} f(i)$ ou ainda $\forall m \leq i < n : f(i)$ é a conjunção dos valores (lógicos) que o predicado $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m) \wedge f(m+1) \wedge \dots \wedge f(n-1)$, ou seja, é o mesmo que afirmar que “qualquer que seja i com $m \leq i < n$, $f(i)$ é verdadeira”, daí que seja conhecido como o **quantificador universal**.

²É necessário clarificar a diferença entre igualdade e identidade. Pode-se dizer que dois gémeos são iguais, mas não que são idênticos, pois são indivíduos diferentes. Por outro lado, pode-se dizer que Fernando Pessoa e Alberto Caieiro não são apenas iguais, mas também idênticos, pois são nomes que se referem à mesma pessoa.

³Notação retirada de [8].

Existe um: $(\mathbf{E} i : m \leq i < n : f(i))$ ou $\bigvee_{m \leq i < n} f(i)$ ou ainda $\exists m \leq i < n : f(i)$ é a disjunção dos valores (lógicos) que o predicado $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o mesmo que $f(m) \vee f(m+1) \vee \dots \vee f(n-1)$, ou seja, é o mesmo que afirmar que “existe pelo menos um i com $m \leq i < n$ tal que $f(i)$ é verdadeira”, daí que seja conhecido como o **quantificador existencial**.

Contagem: $(\mathbf{N} i : m \leq i < n : f(i))$ é o número dos valores (lógicos) verdadeiros que o predicado $f()$ toma para todos os valores do inteiro i verificando $m \leq i < n$. I.e., é o número de valores lógicos verdadeiros na sequência $f(m), f(m+1), \dots, f(n-1)$.

22. Note-se que a notação $x < y < z$ (onde em vez de $<$ pode surgir \leq) é uma forma abreviada de escrever $x < y \wedge y < z$.
23. $\dim(x)$ é a dimensão de x , que tanto pode ser uma matriz como um vector (ver Capítulo 5).
24. Sejam v_1 e v_2 duas sequências de dimensões $\dim(v_1)$ e $\dim(v_2)$ tomando valores num conjunto \mathbb{A} . Diz-se que v_1 é uma permutação de v_2 e vice-versa se $\dim(v_1) = \dim(v_2) \wedge (\mathbf{Q} x :: (\mathbf{N} j : 0 \leq j < \dim(v_1) : v_1[j] = x) = (\mathbf{N} j : 0 \leq j < \dim(v_2) : v_2[j] = x))$, ou seja, se as sequências tiverem a mesma dimensão e contiverem exactamente os mesmo valores com o mesmo número de repetições. Define-se um predicado perm para verificar se duas sequências são permutações uma da outra da seguinte forma:

$$\text{perm}(v_1, v_2) \equiv \dim(v_1) = \dim(v_2) \wedge (\mathbf{Q} x :: (\mathbf{N} j : 0 \leq j < \dim(v_1) : v_1[j] = x) = (\mathbf{N} j : 0 \leq j < \dim(v_2) : v_2[j] = x))$$

A notação para os quantificadores divide-se em três partes: $(a : b : c)$. A primeira parte, a , indica o tipo de quantificador e as respectivas variáveis mudas bem como o respectivo conjunto base. Por exemplo, $(\mathbf{P} i, j \in \mathbb{N} : \dots : \dots)$ indica um produto para todos os i e j inteiros. A segunda parte, b , consiste num predicado que restringe os valores possíveis das variáveis mudas. Esse predicado pode ser omitido se for sempre \mathcal{V} . Na realidade, portanto, as variáveis mudas tomam apenas valores que tornam o predicado verdadeiro. Por exemplo, $(\mathbf{P} i \in \mathbb{N} : i \div 2 \neq 0 : \dots)$ indica um produto para todos os inteiros ímpares. O mesmo efeito poderia ser obtido escrevendo $(\mathbf{P} i \in \{j \in \mathbb{N} : i \div 2 \neq 0\} : \mathcal{V} : \dots)$, onde o predicado é sempre verdadeiro e se restringe à partida o conjunto base do quantificador. A parte c indica os termos do quantificador.

O conjunto de valores que a variável muda de um quantificador pode tomar pode ser indicado implicitamente ou explicitamente. Em qualquer dos casos a indicação é feita através de um predicado que será verdadeiro para todos os valores que se pretende que a variável muda tome e falso no caso contrário. O conjunto base da variável muda pode ser indicado na primeira parte do quantificador quando a indicação for implícita. Quando o conjunto base não for indicado assume-se que é \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros). Exemplos:

1. $(\mathbf{Q} i : i \in \mathbb{N} : \dots)$, $(\mathbf{Q} i \in \mathbb{N} : \mathcal{V} : \dots)$, $(\mathbf{Q} i \in \mathbb{Z} : i > 0 : \dots)$ ou $(\mathbf{Q} i : i > 0 : \dots)$: para todos os naturais.
2. $(\mathbf{Q} i \in \mathbb{N} : i \div 2 = 0 : \dots)$ ou, menos formalmente, $(\mathbf{Q} i \in \mathbb{N} : i \text{ par} : \dots)$: para todos os naturais pares.

3. $(\mathbf{Q} i : m \leq i < n : \dots)$: para todos os inteiros entre m (*inclusive*) e n (*exclusive*).
4. $(\mathbf{Q} i \in \{1, 4, 5\} : \dots)$: para todos os elementos do conjunto $\{1, 4, 5\}$.

Os quantificadores têm, por definição, os seguintes valores quando o conjunto de valores possíveis para a variável de quantificação é vazio:

- $(\mathbf{S} i : \mathcal{F} : \dots) = 0$, a soma de zero termos é nula.
- $(\mathbf{P} i : \mathcal{F} : \dots) = 1$, o produto de zero termos é 1.
- $(\mathbf{Q} i : \mathcal{F} : \dots) = \mathcal{V}$, a conjunção de zero predicados é verdadeira.
- $(\mathbf{E} i : \mathcal{F} : \dots) = \mathcal{F}$, a disjunção de zero predicados é falsa.
- $(\mathbf{N} i : \mathcal{F} : \dots) = 0$, a contagem de zero predicados é nula.

Em geral, quando o conjunto de variação da variável muda é vazio, o valor destes quantificadores é o elemento neutro da operação utilizada no quantificador. Assim, para a soma é 0, para o produto é 1, para a conjunção é \mathcal{V} e para a disjunção é \mathcal{F} .

Existem (pelo menos) as seguintes equivalências entre quantificadores:

- $(\mathbf{Q} i \in A : p(i) : f(i)) = \neg(\mathbf{E} i \in A : p(i) : \neg f(i))$.
- $(\mathbf{E} i \in A : p(i) : f(i)) = \neg(\mathbf{Q} i \in A : p(i) : \neg f(i))$.
- $(\mathbf{Q} i \in A : p(i) : \neg f(i)) = \neg(\mathbf{E} i \in A : p(i) : f(i))$ é o mesmo que $(\mathbf{N} i \in A : p(i) : f(i)) = 0$.
- $(\mathbf{Q} i \in A : p(i) : f(i)) = \neg(\mathbf{E} i \in A : p(i) : \neg f(i))$ é o mesmo que $(\mathbf{N} i \in A : p(i) : f(i)) = \#\{i \in A : p(i)\}$.

A.2 Abreviaturas e acrónimos

e.g. (do latim *exempli gratia*) por exemplo (também se pode usar v.g., de *verbi gratia*).

i.e. (do latim *id est*) isto é.

vs. (do latim *versus*) versus, contra.

cf. (do latim *confer*) conferir, confrontar, comparar.

viz. (do latim *videlicet*) nomeadamente.